					súčet
7	6	8	9	5	104
7	6	9	8	5	103
7	8	6	9	5	102
7	8	9	6	5	99
7	9	6	8	5	100
7	9	8	6	5	98
7	5	8	9	6	107
7	5	9	8	6	106
7	8	5	9	6	104
7	8	9	5	6	100
7	9	5	8	6	102
7	9	8	5	6	99

Tabuľka 1: čísla začínajúce 7

Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2010/2011

Príklad č. 1 (opravoval Kozzy):

Zadanie:

Riešenie: Venujme sa najprv poslednému riadku, kde sa nachádza užitočná operácia : 9. Číslo naľavo od nej musí byť totiž násobkom deviatky, no a také číslo je medzi číslami 1-16 iba jedno, a to samotná deviatka. Potom vpravo bude $9 : 9 = 1$. Za jednotkou je $+12$, do posledného políčka teda dopĺňame 13, pred deviatkou je $+2$, doplníme 7 ($7+2=9$). Posledný riadok má podobu $7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{:9} 1 \xrightarrow{+12} 13$

A čo riadok druhý? Číslo v druhom políčku zľava dostávame násobením toho prvého tromi, bude teda násobkom trojky. Ďalšie číslo bude rovnako násobkom troch, keď totiž k číslu deliteľnému 3 pripočítame číslo deliteľné 3, nedostaneme nič iné, ako opäť číslo deliteľné 3. Toto číslo však musí byť zároveň deliteľné 5, inak by sme ho nevedeli predeliť 5 a doplniť posledné políčko. Jediné číslo ktoré je zároveň násobkom 3 aj 5 medzi 1 a 16, je 15. Na poslednom políčku bude $15 : 5 = 3$, na druhom $15 - 3 = 12$ a na prvom $12 : 3 = 4$. Celý druhý riadok vyzerá nasledovne: $4 \xrightarrow{\cdot 3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{:5} 3$.

Dosiaľ sme použili čísla 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 15, zostávajú 2, 5, 6, 8, 10, 11, 14, 16. V prvom riadku máme na konci operáciu $\cdot 7$, číslo v poslednom políčku je teda deliteľom 7. Spomedzi ešte nepoužitých čísel to môže byť jedine 14, v predošlom políčku je $14 : 7 = 2$, v druhom potom $2 \cdot 3 = 6$, v prvom $6 + 5 = 11$. Prvý riadok: $11 \xrightarrow{-5} 6 \xrightarrow{:3} 2 \xrightarrow{\cdot 7} 14$.

Zostali nám 5, 8, 10, 16 a tretí riadok. Druhá operácia je -11, rozdiel druhého a tretieho čísla bude 11. Tomu vyhovuje už iba jedna dvojica, a to 16 a 5. Na prvé miesto položíme $16 : 2 = 8$, na posledné $5 \cdot 2 = 10$. V treťom riadku je: $8 \xrightarrow{\cdot 2} 16 \xrightarrow{-11} 5 \xrightarrow{\cdot 2} 10$.

Odpoveď: Našli sme jediné možné vyplnenie tabuľky.

Komentár: Riešenia boli väčšinou správne, zapamätajte si však, že keď skúšame všetky možnosti, tak ich naozaj musíme vyskúšať všetky a samozrejme napíšeme do riešenia ako sme skúšali!

Príklad č. 2 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Hľadáme päťciferné číslo. Vieme, že musí spĺňať nasledovné podmienky: Má sa skladať z cifier, ktoré sú po sebe idúce (ale môžu byť aj poprehadzované) a ak sčítame všetkých 5 cifier, potom posledné 4 cifry atď. ich súčet má byť 100.

Označme si toto päťciferné číslo $ABCDE$. Sčítanie potom vyzerá takto:

$$(A+B+C+D+E)+(B+C+D+E)+(C+D+E)+(D+E)+(E)=100$$

$$A+2B+3C+4D+5E=100$$

Ako vidíme, najviackrát sa zaráta posledná cifra a najmenej prvá. To znamená, že najväčší súčet dosiahneme, ak je najväčšie číslo na konci, druhé najväčšie je predposledné atď. a najmenší, keď je to opačne. Máme 6 možností, aké cifry môže toto päťciferné číslo obsahovať (zatiaľ sa nezaoberáme poradím týchto cifier). A to: $0,1,2,3,4$; $1,2,3,4,5$; $2,3,4,5,6$; $3,4,5,6,7$; $4,5,6,7,8$; $5,6,7,8,9$. Keď si vypočítame najväčšie možné súčty v týchto skupinách, zostanú nám len 2 možnosti : $4,5,6,7,8$ a $5,6,7,8,9$. U ostatných je maximálny súčet menší ako 100.

Teraz sa zameriame na poradie cifier. Najprv $4,5,6,7,8$. Začneme od čísla 45678. Jeho súčet je 100. To už máme jedno riešenie, a zároveň jediné pre tieto cifry, pretože 100 je ich maximálny súčet a ostatné už budú len menšie.

Prejdime k druhej možnosti $5,6,7,8,9$. Aby sme však nemuseli skúšať úplne všetky možnosti, lebo ich je príliš veľa, určíme si podmienky. Ak z týchto cifier vytvoríme číslo, ktoré začína cifrou 5, potom najmenší možný súčet nám vznikne pri čísle 59876 a jeho súčet je 105. Vidíme, že súčet 100 takto nedosiahneme, a preto čísla začínajúce cifrou 5 vylúčime. Teraz si vytvoríme číslo s najmenším možným súčtom, ktoré začína číslicou 6. Bude ním 69875 a jeho súčet je 101. To je stále veľa. Ak vytvoríme päťciferné číslo končiace cifrou 9, najmenší možný súčet (87659) je 105. Číslo končiace na 8 bude mať najmenší spoločný súčet 101, a to v čísle 97658.

Už nám ostáva iba si vypísať ostatné možnosti, teda čísla vytvorené z $5,6,7,8,9$, ktoré nezačínajú 5 ani 6 a nekončia 8 ani 9 a doplníme k nim ich súčty. Vypísané sú v tabuľkách 1, 2 a 3.

					súčet
8	6	7	9	5	102
8	6	9	7	5	100
8	7	6	9	5	101
8	7	9	6	5	98
8	9	6	7	5	97
8	9	7	6	5	96
8	5	7	9	6	105
8	5	9	7	6	103
8	7	5	9	6	103
8	7	9	5	6	99
8	9	5	7	6	99
8	9	7	5	6	97
8	5	6	9	7	107
8	5	9	6	7	104
8	6	5	9	7	106
8	6	9	5	7	102
8	9	5	6	7	100
8	9	6	5	7	99

Tabuľka 2: čísla začínajúce 8

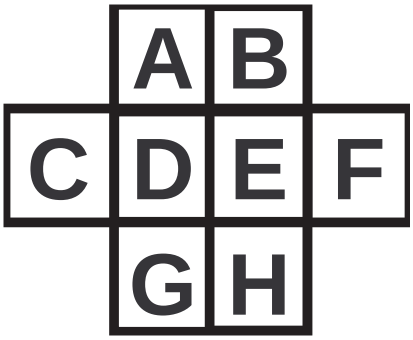
					súčet
9	6	7	8	5	99
9	6	8	7	5	98
9	7	6	8	5	98
9	7	8	6	5	96
9	8	6	7	5	96
9	8	7	6	5	95
9	5	7	8	6	102
9	5	8	7	6	101
9	7	5	8	6	100
9	7	8	5	6	97
9	8	5	7	6	98
9	8	7	5	6	96
9	5	6	8	7	104
9	5	8	6	7	102
9	6	5	8	7	103
9	6	8	5	7	100
9	8	5	6	7	99
9	8	6	5	7	98

Tabuľka 3: čísla začínajúce 9

Teraz sme už vyskúšali všetky možnosti, a z tabuliek vidíme, že pre cifry 5,6,7,8,9 je možne vytvoriť 6 čísel so súčtom 100 a to: 78956, 79685, 86975, 89567, 96857, 97586.
Odpoveď: Riešením sú čísla: 45678, 78956, 79685, 86975, 89567, 96857, 97586.
Komentár: Príklad bol pomerne jednoduchý. Väčšina z vás na to išla postupným vylučovaním možností, ale aj vypisovaním. Jediný problém bol, že ste skončili keď už ste mali prvé riešenie a nepokračovali ste ďalej.

Príklad č. 3 (opravovala Tinka):

Zadanie:
Riešenie: Naším cieľom je doplniť do tabuľky čísla 1 až 8. Máme jedinú podmienku - aby po sebe idúce číslice neboli v štvorčekoch, ktoré sa dotýkajú hranou alebo vrcholom. Políčka v tabuľke si postupne označíme zľava doprava po riadkoch A, B, C, D, E, F, G, H(obr. 1).



Obrázok 1: Sieť čísel

Všimnime si, že stredné políčka D a E susedia každé so šiestimi ďalšími. Ak by sa na D nachádzala napríklad cifra 4, tak jej susedné cifry 3 a 5 by obe mohli byť jedine na F, to však nie je možné. Na stredných políčkach budú číslice, ktoré majú iba jedno susedné číslo - 1 a 8.

Zvolím si prvú možnosť, 1 leží na D a 8 na E. Z toho vieme jednoducho určiť polohu susedných číslic. 2 musí byť na F a 7 na C, aby sa navzájom nijako nedotýkali. Do zvyšných štyroch štvorcov A, B, G a H potrebujeme umiestniť číslice 3, 4, 5 a 6. Vidíme, že A susedí s B a aj G a H sa dotýkajú. Preto na nich nemôžu byť po sebe nasledujúce číslice. Na jednej dvojici susedných políčok budú cifry 3 a 5 a na tej druhej 4 a 6. Žiadne iné rozdelenie nie je možné.

Vyberiem jednu z možností, cifry 3 a 5 budú v prvom riadku. Aby sa 2 a 3 nedotýkali, 3 položíme na A a 5 na B. V dolnom riadku je rozloženie taktiež jednoznačné, 6 sa nesmie dotýkať 7, a preto bude na H a 4 na G. A máme prvé riešenie. Druhé riešenie dostaneme vymenením prvého a tretieho riadku. To znamená, 3 bude na G, 5 na H, 4 na A a 6 na B.

Na začiatku sme si zvolili polohu cifier 1 a 8. Ak ich teraz vymeníme, tak nám vzniknú ďalšie dve riešenia. Zároveň smieme povedať, že žiadne ďalšie neexistuje, lebo rozhodovať o polohe číslic sme mohli iba v dvoch opísaných situáciách a v nich sme vyskúšali, všetko čo bolo možné.
Odpoveď: Existujú 4 rôzne siete.
Komentár: Príklad ste takmer všetci zvládli krásne, niektorí ste nevysvetlili, prečo v strede môžu byť iba čísla 1 a 8. A najčastejšou chybou bolo, že ste nezdôvodnili, prečo už ďalšie riešenia neexistujú.

Príklad č. 4 (opravovali Marka, Mária):

Zadanie:
Riešenie: Strana veľkého štvorca a je 160 m, čiže jeho obsah je:

$$S_1 = a^2 = (160\,\mathrm{m})^2 = 25600\,\mathrm{m}^2$$

Rohy malého štvorca sú vzdialené od stredov strán 40 m, čiže uhlopriečku malého štvorca u vypočítame

$$u = a - 2 \cdot 40\,\mathrm{m} = 160\,\mathrm{m} - 80\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m}$$

Keď poznáme vo štvorci dĺžku jeho uhlopriečok, dokážeme pomocou nej vypočítať jeho obsah. Ako? Označme u dĺžku uhlopriečok (vieme, že sú obe rovnako dlhé). Uhlopriečky vo štvorci sa rozpoľujú a zvierajú pravý uhol, štvorec teda rozdeľujú na 4 zhodné pravouhlé trojuholníky. Každý z nich má dve strany, medzi ktorými leží pravý uhol (odvesny) rovnako dlhé, ich dĺžka je $\frac{u}{2}$. Obsah takéhoto trojuholníka je rovný polovici súčinu dĺžok jeho odvesien,

$$S_\triangle = \frac{\frac{u}{2} \cdot \frac{u}{2}}{2} = \frac{\frac{u^2}{4}}{2} = \frac{u^2}{8}$$

Obsah štvorca je potom súčet štyroch takýchto trojuholníkov, $S_\square = 4 \cdot \frac{u^2}{8} = \frac{u^2}{2}$.

V našom prípade

$$S_2 = \frac{u^2}{2} = \frac{(80\,\mathrm{m})^2}{2} = 3200\,\mathrm{m}^2$$

Akú časť z námestia zaberá fontána vypočítame pomerom obsahu fontány ku obsahu celého námestia, čiže

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{3200\,\mathrm{m}^2}{25600\,\mathrm{m}^2} = \frac{1}{8}$$

Odpoveď: Fontána zaberá $\frac{1}{8}$ z námestia.
Komentár: Tento príklad bol veľmi pekný a ľahký. Preto ste ho skoro všetci mali dobre :o) Niektorí si dokonca všimli, že netreba na to ísť takto cez vyčíslovanie, ale stačilo si obrázok rozdeliť, keďže sme sa pýtali na časť, akú fontána zaberá, a nie na vyčíslenú plochu.

Príklad č. 5 (opravoval Emil):

Zadanie:
Riešenie: Pre prehľadnosť vysvetlenia je dobré najskôr si označiť jednotlivé políčka, napr. od A1 po D4:

	A	B	C	D
1	a	b	c	d
2	e		f	
3	g	h	i	
4	j			

Pri hľadaní riešenia bolo výhodné začať indíciami vodorovné a, zvislé a, zvislé d a vodorovné j, ktoré na seba nadväzovali. Podľa zadania, v každom z nich mali susedné cifry v danom riadku/stĺpci vždy rovnaké rozdiely, pričom najmenšie boli pri vodorovnom a. Rozdiel medzi dvoma ciframi môže byť najmenej 0 a keďže rozdiely pri zvislom a sú väčšie ako pri vodorovnom, musia byť rovné aspoň 1(rozdiel dvoch cifier musí byť celočíselný). Podobne rozdiely medzi ciframi zvislého d sú väčšie ako pri zvislom a, teda musia byť aspoň 2. No a ešte väčšie sú rozdiely pri j, a preto musia byť rovné aspoň 3. Pri j sa cifry zároveň postupne zmenšujú (každá je menšia od predchádzajúcej) a kvôli tomu rozdiel medzi dvoma susednými môže byť maximálne 3 (ak by to už bolo 4, tak rozdiel prvej a poslednej by bol $3 \times 4 = 12$ a to nie je možné). Rozdiel preto musí byť práve 3, čo znamená, že rozdiel medzi prvou (A4) a poslednou cifrou (D4) je 9. Z toho je už jasné, že v poslednom riadku sú cifry 9, 6, 3 a 0.

Rozdiely medzi ciframi zvislého d musia byť rovné 2 a keďže D4 je 0, D3 musí byť 2(nemôže byť záporné). D2 potom môže byť 0 alebo 4 a D1 bude rovné 2 alebo 6. Rozdiely medzi ciframi zvislého a musia byť rovné 1 a nakoľko A4 je rovné 9, A1 môže byť najmenej 6. Navyše cifry vodorovného a musia byť rovnaké (rozdiely rovné 0) a preto aj D1 musí byť najmenej 6. Už však vieme, že to nemôže byť ani viac a preto $A1 = B1 = C1 = D1 = 6$, $D2 = 4$, $D3 = 2$, $A2 = 7$ a $A3 = 8$. Tabuľka zatiaľ vyzerá nasledovne:

	A	B	C	D
1	6	6	6	6
2	7		f	4
3	8	h	i	2
4	9	6	3	0

Cifry v zvislom b sú rovnaké ako posledné dve z vodorovného a, preto $B2 = 6$. Súčet vodorovných e a f je 100 a keďže $e = 76$, $f = 100 - 76 = 24$. Z toho $C2 = 2$. Zvislé h je rovnaké ako zvislé i prečítané odzadu, preto $B3 = C4 = 3$ a podobne $C3 = B4 = 6$.
Odpoveď:

6	6	6	6
7	6	2	4
8	3	6	2
9	6	3	0

Komentár: Príklad ste vyriešili takmer všetci, ktorí ste poslali svoje riešenie. Väčšinu krokov ste zdôvodnili, ale niektorí ste buď zabudli alebo naschvál nevylúčili možnosť, že by sa cifry v indiciách a, či d nezväčšovali/nezmenšovali stále, ale niekedy by sa aj striedali (napr. v d by bolo 2;0;2;0).

Príklad č. 6 (opravovali Monča, DankaK):

Zadanie:
Riešenie: Na začiatok si pre lepšie riešenie rovníc zjednodušíme označenia: počet mužov = m počet žien = z počet detí = d Zo zadania vieme dve tvrdenia. Počet všetkých ľudí je 100 a na stavbe sa nachádzajú iba muži, ženy a deti. Teda platí: $m + z + d = 100$. Pracujúci muž za deň dostane 5 dinárov, žena 4 a dieťa 1. Spolu staviteľ vyplatil za jeden deň 200 dinárov. Preto platí rovnica: $5m + 4z + 1d = 200$.

Prvú rovnicu vynásobíme číslom -1, a teda dostaneme $-m - z - d = -100$. Teraz obe rovnice sčítame.

$$5m + 4z + d = 200$$

$$\underline{-m - z - d = -100}$$

$$4m + 3z = 100$$

Ženy mohli pracovať len so svojimi mužmi, preto ich nemohlo byť viac. Z toho vyplýva, že $m \geq z$. Z rovnice $4m + 3z = 100$ si vyjadríme m: $m = \frac{100-3z}{4}$. Takto vyjadrený počet mužov dosadíme do nerovnice $m \geq z$: $\frac{100-3z}{4} \geq z$. Upravená rovnica vyzerá takto: $\frac{100}{7} \geq z$. Vyčíslime výraz $\frac{100}{7}$, a vidíme, že výsledok je $z \leq 14,29$, teda desatinný. V budúcnosti sa ale budeme sústrediť na celé čísla, keďže sa jedná o počet ľudí.

Tvrdenie zo zadania vraví, že na stavbe bol počet žien rovnaký, alebo väčší ako polovica počtu mužov. Zapíšeme to ako $m \leq 2z$. Tak ako v predchádzajúcom kroku, počet mužov vyjadrený z rovnice $4m + 3z = 100$ dosadíme do tejto nerovnice: $\frac{100-3z}{4} \leq 2z$. Po úprave vyzerá takto: $\frac{100}{11} \leq z$. A keď nerovnicu vyčíslime, dostávame: $z \geq 9,1$.

Vďaka týmto dvom rovniciam vieme, že $9,1 \leq z \leq 14,29$, pričom z je celé číslo. Týmto podmienkam vyhovujú čísla 10, 11, 12, 13 a 14.

Ak rovnicu $m = \frac{100-3z}{4}$ ešte upravíme, dostaneme tvar $m = 25 - \frac{3z}{4}$. Aby bol počet mužov m naozaj celočíselný, musíme od 25 odpočítať tiež celé číslo. To dosiahneme, iba ak bude z, teda počet žien deliteľný štyrmi. Tejto podmienke, už vyhovuje iba jedna možnosť.

$$z = 12$$

Počet mužov vypočítame dosadením vypočítaného počtu žien do rovnice: $m = 25 - \frac{3z}{4} = 25 - \frac{36}{4} = 25 - 9 = 16$.

$$m = 16$$

Tieto dve hodnoty doplníme do prvej rovnice o počte pracovníkov a tak vyjadríme počet detí. $m+z+d = 100 = 16+12+d$

$$d = 72$$

Ešte spravíme skúšku, či aj počet dinárov, ktoré dostali nie je v rozpore zo zadaním: $5m + 4z + d = 5 \cdot 16 + 4 \cdot 12 + 72 = 200$ a môžeme konštatovať, že máme správne riešenie.

Odpoveď: Na stavbe pracovalo 16 mužov, 12 žien a 72 detí.

Komentár: Ak ste si mysleli, že vám stačí riešenie tipnúť, mýlili ste sa. Strhávali sme za to body. Napriek tomu, aj keď ste na to často išli veľkou obkľukou, veľa z vás prišlo k správnemu riešeniu.

Príklad č. 7 (opravovali Phil, Dada):

Zadanie:

Riešenie: Začnime tým, čo je najjednoduchšie zrátať. To je v tomto prípade cena za čísla domov. Vieme, že pravá strana (PS) stála o 5,50 Eur menej ako ľavá (ĽS) a dokopy stáli 42,50 Eur. Tieto údaje vieme pekne zapísať do jednej rovnice:

$$PS + (PS + 5,50e) = 42,50e$$

Jej riešením dostaneme, že ľavá strana stála 24 Eur a pravá 18,5 Eur.

Pozrime sa bližšie na ľavú stranu. Keďže stála 24 Eur, tak tam muselo byť 48 cifier (každá cifra stojí 0,50 Eur). A pretože na tejto strane nie sú žiadne medzery, znamená to, že má všetky nepárne čísla od 3 až po nejaké X, kým nebude použitých 48 cifier. Jednociferné čísla sú 3, 5, 7 a 9. Okrem nich zostáva ešte 44 cifier a keďže už sú to všetko len dvojciferné čísla, tak domy budú až po číslo 53. Teraz si ešte zistime, koľko je na ľavej strane domov a už o nej budeme vedieť úplne všetko. Od 1 po 53 je nepárnych čísel 27, ale keďže začíname číslom 3, tak domov bude len 26.

Prejdime teraz na pravú stranu ulice. Vieme, že stála 18,50 Eur a teda bolo tam použitých 37 cifier. Ďalšia vec, čo vieme, je, že je tam použitý nepárny počet cifier. Ak by na pravej strane nechýbali žiadne čísla domov, a počet domov by bol väčší ako 10, (čo už vieme, že je) tak by bol počet cifier určite párny, pretože by tam boli jednociferné čísla 2,4,6,8 a dvojciferné čísla 10, atď. Z jednociferných čísel máme 4 cifry a z dvojciferných sa nám pridáva každým číslom po dve cifry. Z toho vyplýva, že keby boli v medzere samé dvojciferné čísla domov, počet cifier by bol stále párny, nikdy nie 37. Teda určite chýbajú aj nejaké jednociferné čísla. Keďže čísla 2 a 4 tam určite sú, tak môžme uvažovať len o vynechaní čísla 6 alebo čísla 8 (ak by sme vynechali obe z nich, opäť by sme vynechali párny počet cifier), zatiaľ však nevieme ktoré z nich.

Použité už máme 3 cifry v jednociferných číslach (2, 4 a 6). Zostáva $37 - 3 = 34$ cifier na dvojciferné čísla, to je $\frac{34}{2} = 17$ domov. Zatiaľ na pravej strane ulice je $17 + 2 = 19$ domov (pretože tie s číslami 2 a 4 sú na jednom). Keď sa zaplní medzera tak bude domov rovnako ako na ľavej strane, teda 26. V medzere by malo stáť $26 - 19 = 7$ domov.

Keby sme vynechali pri číslovaní už dom číslo 6, nemohli by sme už vynechať 8 - vieme, že iba jedno z týchto čísel nebolo použité. Keďže je ale medzera len jedna, mala by v takomto prípade veľkosť iba pre jeden dom, hoci sme zistili, že ju má mať pre 7. Vynecháme teda číslo 8 a ďalších 6 domov v poradí: 8, 10, 12, 14, 16, 18 a 20.

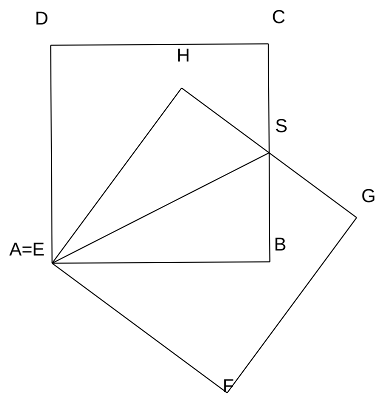
Odpoveď: Posledné číslo na nepárnej strane je 53 a na párnej chýbajú domy s číslami 8, 10, 12, 14, 16, 18 a 20.

Komentár: Príklad nebol ťažký, o čom svedčí vysoký počet riešiteľov. Ale najviac z vás sa nachytalo na cene za pravú stranu ulice. Mysleli ste si, že ak ľavá stojí 24 Eur, automaticky toľko stojí aj pravá(a to ste usúdili z rovného počtu domov). A to pravda nieje, tá totiž stojí 25 Eur (dom 2 a 4 je spojený). A tak tí, čo počítali s rozdielom 5,50 Eur (11 cifier) a nie s 6,50 Eur (13 cifier), to mali nesprávne. Na to ste ale mohli prísť jednoduchou skúškou správnosti: Sčítať počet domov, pri ktorom by vam na pravej strane vyšiel počet 25(nie 26). Musím pochváliť všetkých 7 riešiteľov, ktorí získali zaslúžene 10 bodov a špeciálne uznanie má Matej Choma, ktorý napísal krásne riešenie ako do vzorákov :)

Príklad č. 8 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Náčrt príkladu vidíme na obrázku 2. Na to, aby sme vedeli vypočítať plochu, ktorú zaberajú štvorce $ABCD$ a $EFGH$, potrebujeme vedieť ich rozmery. Zo zadania vieme, že štvorec $ABCD$ má dĺžku strany 8 cm. Dĺžku strany druhého štvorca zatiaľ nepoznáme. Poďme si ju zistiť.



Obrázok 2: Náčrt: príklad 8

Označme si stred strany BC (ktorý je zároveň aj stredom strany GH) S. Pretože všetky vnútorné uhly štvorca sú pravé uhly, vieme si vypočítať dĺžku prepony AS (resp. ES) v trojuholníku ABS (resp. EBS) pomocou Pytagorovej vety:

$$|AS|^2 = |AB|^2 + |BS|^2$$

$$|AS| = \sqrt{|AB|^2 + |BS|^2}$$

zo zadania vieme, že dĺžka strany AB je 8 cm a že bod S je v strede strany BC, takže to dosadíme:

$$|AS| = \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$|AS| = \sqrt{80}$$

Obdobne to platí aj v trojuholníku ESH:

$$|ES|^2 = |EH|^2 + |HS|^2$$

zo zadania vieme, že bod S je v strede strany GH, po dosadení:

$$|ES|^2 = |EH|^2 + (\frac{|EH|}{2})^2$$

$$|ES|^2 = |EH|^2 + \frac{|EH|^2}{2^2}$$

$$|ES|^2 = \frac{5|EH|^2}{4}$$

keďže body A a E sú totožné, tak potom platí, že $|ES| = |AS|$, dosadíme:

$$|AS|^2 = \frac{5|EH|^2}{4}$$

$$(\sqrt{80})^2 = \frac{5|EH|^2}{4}$$

$$80 = \frac{5|EH|^2}{4}$$

$$|EH|^2 = 64$$

$$|EH| = 8$$

Zistili sme, že štvorce majú rovnaké dĺžky strán.

Keď už poznáme dĺžky strán štvorcov, vieme vypočítať plochu, ktorú zaberajú. Vypočítame ju ako súčet obsahov oboch štvorcov, od ktorých odpočítame obsah plochy, na ktorej sa prekrývajú. Obsahy oboch štvorcov sú rovnaké a sú $8\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 64\,\mathrm{cm}^2$. Obsah plochy, na ktorej sa prekrývajú, vieme vypočítať ako súčet obsahov trojuholníkov ABS a ESH, čo je: $\frac{8\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}}{2} + \frac{8\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}}{2} = 32\,\mathrm{cm}^2$. A teda plocha, ktorú dané štvorce zaberajú je: $64\,\mathrm{cm}^2 + 64\,\mathrm{cm}^2 - 32\,\mathrm{cm}^2 = 96\,\mathrm{cm}^2$

Odpoveď: Obsah plochy, ktorú zaberajú štvorce $ABCD$ a $EFGH$ je 96 cm^2.

Komentár: Správnu odpoveď ste mali takmer všetci, avšak niektorí z vás buď zabudli, alebo nedostatočne odôvodnili, prečo majú dané štvorce rovnaké dĺžky strán, za čo nanešťastie museli ísť body dole.

Príklad č. 9 (opravovali Jančo, Kaja):

Zadanie:

Riešenie: Vieme, že hľadané číslo má byť deliteľné šiestimi. Aby bolo číslo deliteľné šiestimi, musí byť deliteľné dvojkou a trojkou. Trojkou je číslo deliteľné, ak je aj jeho ciferný súčet deliteľný trojkou. Naše číslo sa skladá zo všetkých cifier 1 až 9.

Ciferný súčet $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, teda je deliteľné tromi. Na to, aby bolo deliteľné aj dvojkou, musí byť párne a teda končiť na jednu z číslic 2, 4, 6 a 8.

Vieme, že konečné číslo po ôsmych zaokrúhleniach je 500000000. To znamená, že prvá cifra je buď 5 alebo 4 (to sa zvýši na 5 ak predchádzajúce číslo zaokrúhlime nahor).

Teraz si napíšeme, ako sa musia zaokrúhľovať čísla, ak je prvá päťka alebo štvorka (H - zaokrúhľovanie nahor, D - zaokrúhľovanie nadol).

5DHDHDHDH

4HDHDHDHD

Podľa toho vieme určiť aké číslice z 2, 4, 6, 8 môžu byť na konci čísla.

- A. 5DHDHDHD6
- B. 5DHDHDHD8
- C. 4HDHDHDH2
- D. 4HDHDHDH4 – neexistuje, pretože je dvakrát použité číslo 4.

Vieme, že na mieste tisícok a desaťtisícok je súčet cifier 7. To znamená, že tam môžu byť dvojice čísel 1-6, 2-5 a 3-4. Jedna z dvojice týchto cifier sa zaokrúhľuje nadol a druhá nahor. Vo dvojici 3-4 toto neplatí, lebo obe sa zaokrúhľujú nadol. Na výber nám teda ostávajú iba dvojice cifier 1-6 a 2-5.

Vyskúšame možnosť A. Ani jedna dvojica nepasuje, lebo cifry 5 a 6 sú už použité.

Prejdime na možnosť B. Tam môže byť dosadená dvojica 1-6, pretože číslica 5 už je použitá. Podľa zaokrúhľovania nahor a nadol doplníme cifry do čísla: 5DHD61HD8. Vieme, že súčet číslic po štyroch zaokrúhleniach je 24. Takže si naše číslo 4-krát zaokrúhlime a vyjde nám: 5DHD60000. Máme tu tri neznáme čísla, ktorých súčet musí byť $24 - 5 - 6 = 13$. To sa dá zo zostávajúcich čísel 2, 3, 4, 7, 9 dosiahnuť len jedným spôsobom, a to ako súčet čísel 2, 4 a 7. Naše číslo môže byť buď 527461HD8 alebo 547261HD8. V obidvoch prípadoch nám chýbajú číslice 3 a 9, ktoré môžeme ľahko doplniť podľa zaokrúhľovania: 527461938 alebo 547261938. Ani jedno z nich však nie je riešením, keďže sú nedeliteľné siedmimi.

Pozrime sa na možnosť C = 4HDHDHDH2. V tejto možnosti môže byť na mieste tisícok a desaťtisícok len dvojica 1-6, pretože cifru 2 už máme použitú. Doplníme tieto dve nové cifry: 4HDH16DH2. Vieme, že súčet číslic po štyroch zaokrúhleniach je 24 a číslo by malo byť 4HDH20000. Súčet týchto troch neznámych číslic musí byť $24 - 4 - 2 = 18$. To sa dá z čísel 3, 5, 7, 8, 9 dosiahnuť len jedným spôsobom, a to ako súčet čísel 3, 7 a 8. Naše číslo môže mať tvar 483716DH2 alebo 473816DH2. V obidvoch prípadoch nám chýbajú číslice 5 a 9. To by sa mohlo zdať ako problém, keďže sa zaokrúhľujú nahor, ale keď najskôr zaokrúhlime číslicu 5, tak sa nám nasledujúca deviatka zväčši o jedna, zaokrúhli sa na nulu. A nula je cifra zaokrúhľujúca sa nadol. Poradie cifier 5 a 9 v čísle musí byť 95. Podľa toho si smieme doplniť naše dve čísla: 483716952 alebo 473816952. Z nich je deliteľné sedmičkou číslo 473816952, ktoré je zároveň hľadaným číslom.

Odpoveď: Naše 9-miestne číslo je 473816952.

Komentár: Príklad bol celkom ťažký, málo z vás malo úplne dokonalé riešenie. Často ste vychádzali zo zlého predpokladu, alebo niečo nevysvetlili. Celkovo ale aj napriek tomu ste ho viacerí zvládli :)

Prémia (opravovala gubika):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Jedna rodinka zastala pred tmavým tunelom. Otec vie prejsť cez tunel za 2 minúty, mama za 4, syn za 8 a dcéra za 10 minút. V tuneli potrebuje každý mať baterku. K dispozícii majú iba jednu. Za aký najkratší čas sa vie celá rodinka dostať na druhú stranu tunela, keď do tunela sa zmestia iba dvaja ľudia naraz a hýbu sa rýchlosťou pomalšieho?

Riešenie: Zo zadania vieme, že tunelom smú ísť naraz len dvaja ľudia a pretože majú len jednu baterku musí sa vždy niekto vrátiť s baterkou späť. Uvažujme o tom, čo je pre nás výhodné a čo nie. Určite sa rodine neoplatí, aby sa tunelom vracal syn, či dokonca dcéra keďže im to trvá dlho. Späť teda budú chodiť len otec alebo mama. Otec je najrýchlejší, oplatilo by sa nám teda, aby každého člena odprevadil na druhú stanu a vrátil by sa po ďalších? Poďme zrátať, koľko by im to takto trvalo. Na poradí tu nezáleží, lebo každý musí tunelom prejsť. S dcérou mu to bude cestou tam trvať 10 minút, späť 2, so synom pôjde tunelom 8 minút, za dve sa vráti po mamu a spoločne prejdú k deťom za 4 minúty. Čiže celá rodinka je na druhej strane za 26 minút.

No je to ten najrýchlejší spôsob? Neznížili by sme tento čas, keby sme syna a dcéru, kedže sú najpomalší, poslali spolu? Každému zvlášť im to trvá $10 + 8$, spolu by šli iba 10. Nemôžeme ich samozrejme poslať ako prvých lebo by sa niekto z nich musel vracať. Pošlime teda prvých rodičov, tým to cez tunel bude trvať 4 minúty, kým sa otec vráti späť k deťom prejdú ďalšie dve. Deti sa za 10 minút dostanú cez tunel a mama sa vráti za štyri po otca. Rodičia za ďalšie štyri prejdú spolu tunel. Trvá im to teda iba 24 minút.

Odpoveď: Rodina sa cez tunel vie dostať za 24 minút.

Komentár: Príkladík nebol ťažký, tentoraz bola ako prémia logická úloha, každý z vás sa teda dopracoval k nejakému výsledku, bolo si iba treba uvedomiť že môžme deti poslať spolu. Ešte dve poznámky k hádankám v zadaní. Verejnoprávnu televíziu máme len jednu, tá má tri kanály. A každý n-uholník okrem troj-, štvor- a päťuholníka má viac uhlopriečok ako vrcholov.