Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2010/2011

Príklad č. 1 (opravovala gubika):

Zadanie:

Riešenie: Ivanov výsledný štvorec obsahoval 16 štvorčekov, musel to teda byť štvorec so stranou dlhou 4 štvorčeky (obsah štvorca so stranou a sa počíta $S = a \cdot a$). Na jeho zloženie teda Ivan potreboval štyri pásy s dĺžkou 4 štvorčeky. Pre nás to znamená, že ak jedna zo strán obdĺžnika bola 4 štvorčeky, pri prvom strihaní musíme odstrihnúť jednu celú stranu. Tým sa nám jej susedné strany skrátili o 1 štvorček, protiľahlá strana nám ale ostáva nezmenená, má dĺžku 4 štvorčeky. Jej odstrihnutím získame druhý potrebný pásik a dĺžky strán, z ktorých sme ešte nestrihali, sa nám zmenšili o ďalší štvorček, sú teda o 2 kratšie ako na začiatku. Aby sme dokázali odstrihnúť zvyšné dva pásy, musia mať strany, z ktorých sme ešte nestrihali, dĺžku 4 štvorčekov. Keďže boli skrátené o 2 štvorčeky ich pôvodná dĺžka bola 6 štvorčekov. Obdĺžnik teda mal rozmery 4×6 štvorčekov.

Odpoveď: Ivanov pôvodný obdĺžnik mal rozmery 4×6 štvorčekov.

Komentár: Príklad ťažký nebol, všetci ste ho zvládli veľmi dobre.

Príklad č. 2 (opravovala Danka):

Zadanie:

Riešenie: Pôvodný príklad nám na prvý pohľad neplatí, potrebujeme zameniť dva typy cifier, aby rovnica bola správna. Pozrime sa najprv na rozdiel na mieste jednotiek: $3 - 2 = 5$. To však nie je pravda. Aby rovnosť v príklade platila, musí platiť aj na mieste jednotiek (posledné cifry totiž nie sú ovplyvnené nijakými ďalšími; na mieste desiatok už rovnosť nastať nemusí). To znamená, že minimálne jednou z vymieňaných cifier bude cifra, ktorá sa nachádza na mieste jednotiek aspoň jedného z troch čísel vystupujúcich v príklade. Jednoduchšie povedané, aspoň jednu z cifier 2, 3, 5 musíme vymeniť, aby bola rovnosť splnená. Uvažujme najprv, že z nich vymeníme práve jednu. Vzniknú nám tri možnosti:

- Výmena 2 a 8. Na mieste jednotiek už bude rovnosť platiť: $(1)3 - 8 = 5$. Keď si prepíšeme celé zadanie príkladu, dostávame: $6253 - 4178 = 8845$. Avšak rovnica neplatí, a preto vyskúšame ďalšiu možnosť.
- Výmena 3 a 7. Na mieste jednotiek už bude rovnosť platiť: $7 - 2 = 5$. Keď si prepíšeme celé zadanie príkladu, dostávame: $6857 - 4132 = 2245$. Rovnica stále neplatí, a preto vyskúšame ďalšiu možnosť.
- Výmena 5 a 1. Na mieste jednotiek už bude rovnosť platiť: $3 - 2 = 1$. Keď si prepíšeme celé zadanie príkladu, dostávame: $6813 - 4572 = 2241$. Tentokrát rovnosť platí a teda sa nám podarilo nájsť prvé riešenie.

Ešte musíme preveriť, či je len jediné alebo existujú ďalšie riešenia. Teraz uvažujeme s tým, že cifry na mieste jednotiek sa vymenia navzájom. Jediná možnosť, ktorá prichádza do úvahy je:

- Výmena 3 a 5. Na mieste jednotiek už bude rovnosť platiť: $5 - 2 = 3$. Keď si prepíšeme celé zadanie príkladu, dostávame: $6835 - 4172 = 2243$. Avšak táto rovnica neplatí.

Keďže už neexistuje iná možnosť ako dosiahnuť platnosť rovnice na mieste jednotiek, neexistuje ani ďalšie riešenie nášho príkladu.

Odpoveď: Príklad má len jedno riešenie, a to výmenu cifier 1 a 5.

Komentár: Mnohí z vás úlohu riešili skúšaním a pokiaľ preverili všetky možnosti, získali plný počet bodov. Ak ste však skúšali len niektoré možnosti a nevysvetlili ste, prečo ste ostatné vylúčili, išli body dole. Veľa z vás riešilo úlohu jednoduchším spôsobom, uvedeným vo vzoráku, no niekoľkí zabudli preveriť 4. možnosť s výmenou 3 a 5 a vtedy ste stratili nejaký ten bodík. Napísanie výsledku nestačilo, bolo treba vysvetliť, ako ste sa k nemu dopracovali, takže verím, že sa nabudúce polepšíte:)

Príklad č. 3 (opravovali Jančo, Danka K.):

Zadanie:

Riešenie: Našou úlohou bude v prvom rade nájsť počet všetkých 4-ciferných čísel, ktoré spĺňaju zadané podmienky:

1. Súčet prvých dvoch cifier je 3.
   To znamená, že možnosti sú len tieto: $12, 21, 30$. Možnosť „03“ nastať nemôže, keďže na začiatku čísla nemôže byť nula.
2. Stredné dvojčíslie je deliteľné 4.
   Keďže prvá cifra tohto dvojčíslia sa musí zhodovať s druhou cifrou prvého dvojčísla (2, 1, 0), vyhovujúcich dvojčísiel (s týmito ciframi na začiatku deliteľnými 4) je len 8: 20, 24, 28, 12, 16, 00, 04, 08. Ale keď sa na to lepšie pozrieme, z týchto čísel musíme vyradiť čísla končiace osmičkou, lebo potom by nám vyšlo (podľa tretej podmienky), že $8+? = 7$. Čiže nám ostane 6 dvojíc: $20, 24, 12, 16, 00, 04$.
3. Súčet posledných dvoch cifier je 7.
   Prvá cifra tohto posledného dvojčíslia sa musí zhodovať s druhou cifrou stredného dvojčíslia (0, 4, 2, 6). Aby dávali dokopy s poslednou cifrou súčet 7, môže posledné dvojčíslie byť $07, 43, 25$ alebo 61.

Vzniknú nám tieto čísla (na základe všetkých troch možností, ktoré na seba nadväzujú) : $1207, 1243, 2125, 2161, 3043, 3007$ – možných správnych čísel je 6.

Vieme, že žiadna trojica detí nemala rovnaké čísla, takže najviac dvaja žiaci mohli mať rovnaké číslo. Maximum dosiahneme, ak každé z čísel priniesli práve dve deti, takže počet rôznych čísel vynásobíme dvomi: $6 \cdot 2 = 12$.

Odpoveď: Detí v triede bolo maximálne 12.

Komentár: Väčšina z vás zabúdalo na možnosť stredného dvojčísla 00, teda že nula je tiež deliteľná 4. Takisto si treba pozorne prečítať zadanie, a teda, že tam boli trojice, nie dvojice. :)

Príklad č. 4 (opravovali ViRPo, Majo, Mária):

Zadanie:

Riešenie: Minimálne množstvo si označíme ako m a bonusový počet ako b. Počet nazbieraných orieškov v jednotlivých dňoch bude vyzerať takto:

deň	m	b
1	1	0
2	1	1
3	1	2
4	1	3
5	1	4
	5	10

Dohromady za 5 dní teda veverička nazbierala $5 \cdot m + 10 \cdot b$ orieškov, čo zodpovedá počtu 100.

Potom päťkrát menej orieškov, čo je $\frac{5 \cdot m}{5} + \frac{10 \cdot b}{5} = m + 2 \cdot b$, prislúcha číslu päťkrát menšiemu, 20.

Vieme, že každý deň bolo minimálne množstvo väčšie ako bonusové. V posledný deň minimálne množstvo bolo m, bonusové $4 \cdot b$, takže platí $m > 4 \cdot b$.

Pokiaľ vo výraze $m + 2 \cdot b$ číslo m nahradíme menším číslom $4 \cdot b$, hodnota celého výrazu bude rovnako menšia ako pôvodných 20, takže $4 \cdot b + 2 \cdot b = 6 \cdot b < 20$.

Ak by b bolo 4, $6 \cdot b = 24$, pri väčšom b by bol súčet ešte väčší. Najvyššia prípustná hodnota pre b je teda 3.

Musíme ešte overiť, že pre $b = 3$ naozaj môže nazbierať 100 orieškov. Má platiť $m + 2 \cdot b = m + 2 \cdot 3 = m + 6 = 20$, čo platí práve vtedy, keď $m = 14$, teda minimálna hodnota každého dňa je 14, bonus narastá o 3.

Odpoveď: Veverička mohla nazbierať druhý deň najviac 3 bonusové orechy.

Komentár: Tento príklad bol naozaj ľahký a body ste strácali len za nepozornosť, či za zlé pochopenie zadania alebo ste v príklade ku ničomu rozumnému nedospeli. :) Inak sa tešíme z veľa desiatok.

Príklad č. 5 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Pretože má byť štvorec symetrický podľa jeho uhlopriečky, musia mať všetky čísla, ktoré sa majú nachádzať v tomto štvorci, svojho kamaráta na opačnej strane uhlopriečky a teda sa musia nachádzať párny počet krát vo štvorci. Výnimku tvoria čísla, ktoré sa nachádzajú priamo na uhlopriečke, podľa ktorej má byť štvorec súmerný, pretože oni sú si samy kamarátom (ležia na mieste, kde sa stretáva riadok a stĺpec, ktoré majú obsahovať rovnaké čísla) a teda ich počet bude nepárny. Aby sme zistili, ktoré čísla budú ležať na uhlopriečke, musíme zistiť ich celkový počet v obdĺžnikoch:

- jednotka sa tam nachádza 6-krát
- dvojka sa tam nachádza 3-krát
- trojka sa tam nachádza 2-krát
- štvorka sa tam nachádza 3-krát
- päťka sa tam nachádza 4-krát
- šestka sa tam nachádza 1-krát
- sedmička sa tam nachádza 1-krát
- osmička sa tam nachádza 2-krát
- deviatka sa tam nachádza 3-krát

Na uhlopriečke budú ležať čísla $2, 4, 6, 7$ a 9, pretože tých je nepárny počet a pretože je ich práve päť, tak sa nesmie na uhlopriečke nachádzať iné číslo, ani žiadne dvakrát.

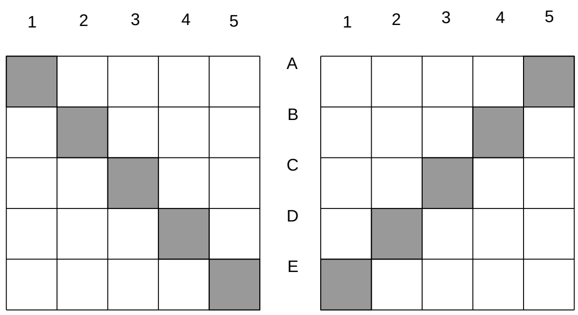
Teraz si treba uvedomiť, že štvorec má dve uhlopriečky, podľa ktorých je súmerný (obrázok 1). A to uhlopriečku $A1 - E5$ a $A5 - E1$.

Pozrime sa na prípad, že symetrickou uhlopriečkou je uhlopriečka $A1 - E5$.

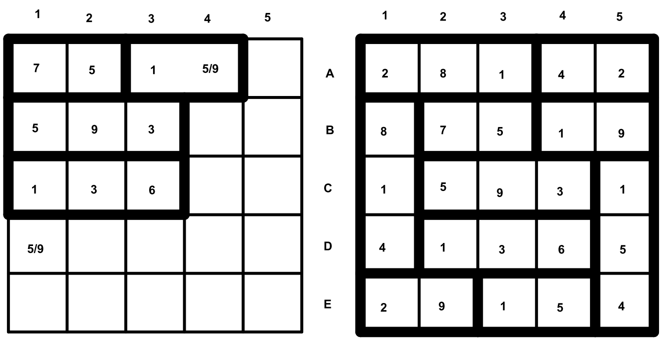
Ako sme vyššie zistili, tak číslo 6 sa musí nachádzať na uhlopriečke. Jediný obdĺžnik v ktorom sa vyskytuje číslo 6, je $1 - 3 - 6$. Pretože číslo 3 je vľavo od čísla 6 (je v stĺpci s menším číslom), tak sa musí nachádzať aj nad ním (pri symetrii sa „vymenia“ čísla riadku a stĺpca). Číslo tri sa nachádza jedine v obdĺžniku $5 - 9 - 3$, ktorý umiestnime tak, aby bol presne nad obdĺžnikom $1 - 3 - 6$. Pri tomto usporiadaní nám na uhlopriečku príde ešte aj číslo 9, ktoré na nej aj má ležať. Číslo 5 sa nachádza vľavo od čísla 9 (v obdĺžniku $5 - 9 - 3$), takže sa bude aj nachádzať nad ním. Toto číslo vieme dostať jedine tak, že k tomuto útvaru pripojíme obdĺžnik, ktorý má číslo 5 v spodnom riadku (zamyslime sa prečo). Takéto obdĺžniky máme na výber dva: $1 - 5$ alebo $7 - 5$. Číslo, ktoré leží vľavo od tohto čísla 5, je číslo, ktoré leží aj na uhlopriečke (leží o jedna vľavo a hore od čísla 9, ktoré leží o jedna vľavo a hore od čísla 6, ktoré leží na uhlopriečke), a keďže číslo 1 nemôže ležať na uhlopriečke, môžeme tam dať jedine obdĺžnik $7 - 5$. Keďže číslo 1 je o dva vľavo od čísla 6, tak musí byť aj o dva nad ním. Na toto políčko vieme číslo 1 dostať len pomocou vodorovného obdĺžnika, ktorý ho má na mieste, ktoré je úplne vľavo (zamyslime sa prečo). Takéto obdĺžniky máme dva: $1 - 5$ a $1 - 9$. Zatiaľ tam dáme len obdĺžnik $1 - ?$ a neskôr sa rozhodneme, ktorý z nich tam pôjde. Útvar, ktorý sme takto poskladali nazvime *základ*.

Pretože sa má číslo 6 nachádzať na uhlopriečke a vľavo od neho sú ešte dve čísla a vpravo jedno číslo, tak sa môže nachádzať jedine v riadkoch C a D.

Na obrázku 2 sú vyznačené všetky možnosti, ktoré môžu v tomto prípade nastať.



Obrázok 1: Uhlopriečky



Obrázok 2: Možnosti pre uhlopriečku $A1 - E5$

V prvom štvorci sme uložili *základ* tak, aby číslo 6 bolo na uhlopriečke a zároveň v riadku C. Nech umiestníme namiesto obdĺžnka $1-?$ hociktorý z obdĺžnikov $1-5$ a $1-9$, tak vždy dostaneme na políčku, ktoré je o tri vpravo od čísla 7, číslo, ktoré nevieme umiestniť na políčko, ktoré je o tri dole od čísla 7 (žiaden obdĺžnik nemá číslo 5 alebo 9 vľavo hore). To znamená, že takéto uloženie nie je riešením úlohy.

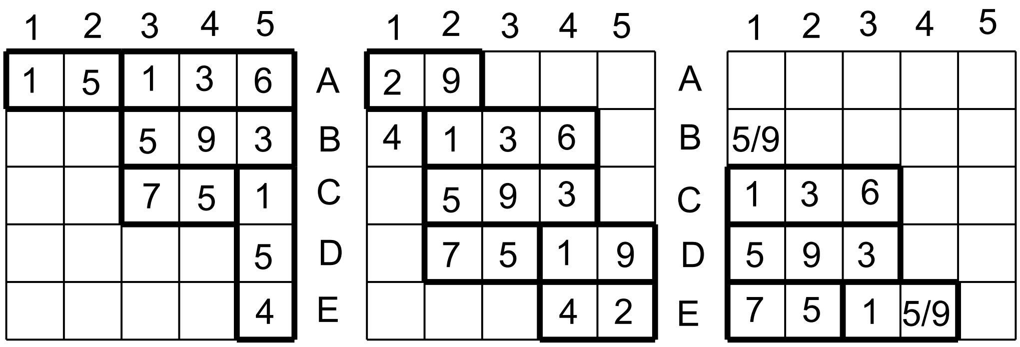
V druhom štvorci sme uložili *základ* tak, aby číslo 6 bolo na uhlopriečke a zároveň v riadku D. Ak by sme použili namiesto obdĺžnika $1-?$ obdĺžnik $1-5$, tak by sme na mieste, ktoré je o tri dole od čísla 7 dostali číslo 5, ktoré sa však nachádza jedine vo zvislom obdĺžniku $1-5-4$, ktorý tam nevieme uložiť. To znamená, že namiesto obdĺžnika $1-?$ položíme obdĺžnik $1-9$. Na políčku, ktoré je vzdialené o tri vpravo od čísla 7 máme teda číslo 9. Toto číslo musí byť aj na políčku, ktoré je o tri dole od čísla 7. Číslo 9 sa nachádza už jedine v obdĺžniku $2-9$, takže ho tam umiestnime. Na políčku, ktoré je o tri dole a jedna vľavo od čísla 7 máme číslo 2. Musí tiež byť na políčku, ktoré je o jedna hore a tri vpravo od čísla 7 (premyslime si prečo). Vieme ho tam dostať jedine obdĺžnikom, ktorý je vodorovný a číslo 2 má úplne vpravo. Takýto obdĺžnik je len jeden: $4-2$. Umiestnime ho tam. Na uhlopriečke sme zatiaľ uložili tri čísla (7, 9 a 6) a ešte nám zostávajú čísla 2 a 4. Číslo 2 sa nachádza už len vo vodorovnom obdĺžniku $2-8-1$, takže, ak má ísť číslo 2 na uhlopriečku, musí ísť na políčko, ktoré je o jedna hore a jedna vľavo od čísla 7. Na políčka, ktoré sú o jedna a dva vpravo od tohto čísla 2, sme dostali čísla 8 a 1. Tieto čísla musia ísť aj na políčka, ktoré sú o jedna a dva dole od neho. Tomu vyhovuje jedine zvislý obdĺžnik $8-1-4$. Ostali nám ešte zvislý obdĺžnik $1-5-4$ a vodorovný obdĺžnik $1-5$, ktoré vieme uložiť do štvorca jediným spôsobom. Máme uložené všetky obdĺžniky. Rýchla kontrola, či je vzniknutý švorec symetrický, nám povie, že sme našli jedno riešenie.

Teraz sa pozrime na prípad, že symetrickou uhlopriečkou je uhlopriečka $A5 - E1$.

Ako sme vyššie zistili, tak číslo 6 sa musí nachádzať na uhlopriečke. Jediný obdĺžnik v ktorom sa vyskytuje číslo 6 je $1-3-6$. Pretože číslo 3 je vľavo od čísla 6, tak sa musí aj nachádzať pod ním. Číslo tri sa nachádza jedine v obdĺžniku $5-9-3$, ktorý umiestníme tak, aby bol presne pod obdĺžnikom $1-3-6$. Pri tomto usporiadaní nám na uhlopriečku príde ešte aj číslo 9, ktoré na nej aj má ležať. Číslo 5 sa nachádza vľavo od čísla 9 (v obdĺžniku $5-9-3$), takže sa bude aj nachádzať pod ním. Toto číslo vieme dostať jedine tak, že k tomuto útvaru pripojíme obdĺžnik, ktorý má číslo 5 v hornom riadku (zamyslime sa prečo). Takéto obdĺžniky máme na výber dva: $1-5$ alebo $7-5$. Číslo, ktoré leží vľavo od tohto čísla 5, je číslo, ktoré leží aj na uhlopriečke (leží o jedna vľavo a hore od čísla 9, ktoré leží o jedna vľavo a hore od čísla 6, ktoré leží na uhlopriečke), a keďže číslo 1 nemôže ležať na uhlopriečke, môžeme tam dať jedine obdĺžnik $7-5$. Keďže číslo 1 je o dva vľavo od čísla 6, tak musí byť aj o dva pod ním. Na toto políčko vieme číslo 1 dostať pomocou obdĺžnikov, ktoré ho majú v hornom riadku (zamyslime sa prečo). Takéto obdĺžniky máme tri: vodorovné $1-5$, $1-9$ a zvislý $1-5-4$. Pretože máme toľko možností, zatiaľ tam žiaden obdĺžnik nebudeme dávať. Útvar, ktorý sme takto poskladali si nazvime *základ*$_2$.

Pretože sa má číslo 6 nachádzať na uhlopriečke a vľavo od neho sú ešte dve čísla, tak sa môže nachádzať jedine v riadkoch A, B a C.

Na obrázku 3 sú vyznačené všetky možnosti, čo môžu v tomto prípade nastať.



Obrázok 3: Možnosti pre uhlopriečku $A5-E1$

V prvom štvorci sme uložili *základ*$_2$ tak, aby číslo 6 bolo na uhlopriečke a zároveň v riadku A. Jediný obdĺžnik, ktorým vieme uložiť číslo 1 je obdĺžnik $1-5-4$. Týmto dostávame na políčkach, ktoré sú o tri a štyri pod číslom 6, čísla 4 a 5. Musia tiež byť na políčkach, ktoré sú o tri a štyri vľavo od čísla 6. Tu však narazíme na problému, pretože aby sme ich tam vedeli uložiť, potrebovali by sme buď jeden vodorovný obdĺžnik, ktorý by ich obsahoval obe, alebo dva zvislé, ktoré by mali každý jedno z nich úplne hore. Ani jeden taký obdĺžnik však nemáme, takže toto nie je riešením úlohy.

V druhom štvorci sme uložili *základ*$_2$ tak, aby číslo 6 bolo na uhlopriečke a zároveň v riadku B. Číslo 1 vieme uložiť v obdĺžnikoch $1-5$ a $1-9$. Ak by sme použili obdĺžnik $1-5$, tak dostávame na políčku, ktoré je o tri vpravo od čísla 7, číslo 5. Musí tiež byť na políčku, ktoré je o tri hore od čísla 7, avšak jediný obdĺžnik, v ktorom sa nachádza číslo 5 je zvislý obdĺžnik $1-5-4$, ktorý tam nevieme uložiť. Takže skúsime obdĺžnik $1-9$. Namiesto čísla 5, tak dostávame číslo 9. Posledný obdĺžnik, v ktorom sa nachádza číslo 9 je obdĺžnik $2-9$, tak ho tam umiestnime. Na políčku, ktoré je o tri hore a jedna vľavo od čísla 7 máme číslo 2. Musí tiež byť na políčku, ktoré je o jedna dole a tri vpravo od čísla 7 (premyslime si prečo). Vieme ho tam dostať jedine obdĺžnikom, ktorý je vodorovný a číslo 2 má úplne vpravo. Takýto obdĺžnik je len jeden: $4-2$. Umiestnime ho tam. Na políčku, ktoré je o tri dole od čísla 6 máme teraz číslo 4, ktoré musí byť aj na políčku, ktoré je o tri vľavo od čísla 6. Tam ho vieme dostať jedine zvislým obdĺžnikom, ktorý ho má úplne hore. Pretože však žiaden takýto obdĺžnik nemáme, tak ani táto možnosť nie je riešením úlohy.

V treťom štvorci sme uložili *základ*$_2$ tak, aby číslo 6 bolo na uhlopriečke a zároveň v riadku C. Číslo 1 vieme umiestniť jedine s obdĺžnikmi $1-5$ alebo $1-9$. Nech ho umiestnime s ktorýmkoľvek z týchto obdĺžnikov, tak vždy dostaneme na políčku, ktoré je o tri vpravo od čísla 7, číslo, ktoré nevieme umiestniť na políčko, ktoré je o tri hore od čísla 7 (žiaden obdĺžnik nemá číslo 5 alebo 9 vľavo hore). To znamená, že takéto uloženie nie je riešením úlohy.

Týmto sme prešli všetky možnosti, a teda žiadne ďalšie riešenia nie sú.

Odpoveď: Vieme poskladať iba jeden takýto štvorec.

Komentár: Skoro všetci ste našli to jediné riešenie, avšak ste nenapísali postup, akým ste sa k nemu dostali a prečo nie je takýchto štvorcov viac, za čo ste veľa bodov nemohli získať.

Príklad č. 6 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Označme si počet dievčat x a počet chlapcov y. Celkový počet hráčov na turnaji je $n = x+y$. Každý hrá s každým. To znamená že každý hráč (čiže spolu n) hrá zo všetkými ostatnými, okrem seba samozrejme (teda $n-1$). To by malo byť spolu $n \cdot (n-1)$ zápasov. Avšak, ak sa zamyslíme, v tomto prípade sme zarátali ako dve rôzne možnosti keď hrá napríklad Anička s Jurkom ale aj Jurko s Aničkou. Preto ešte výsledný počet musíme vydeliť dvomi, spolu sa teda odohralo $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ zápasov. Zo zadania vieme že, tento počet má zodpovedať 136 zápasom. Dosadíme si toto číslo do rovnosti a dostaneme $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 136$ a po úprave $n \cdot (n-1) = 272$. Ako vidíme 272 sa rovná súčinu dvoch po sebe idúcich čísel. Napíšeme si teda súčin prvočísel, $272 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$. Ten sa dá zapísať aj ako $272 = 16 \cdot 17$, čo je presne to čo hľadáme. Takže $n = 17$, teda aj $x + y = 17$. Taktiež poznáme počet zápasov typu ch-ch a d-d a to 66. Potom zvyšných 70 zápasov $(136 - 66 = 70)$ je typu ch-d. Takže každý chlapec (y) hrá so všetkými dievčatami (x), čo zapíšeme ako $x \cdot y = 70$. Už stačí nájsť len také x, y pre ktoré platia obidve rovnosti $x \cdot y = 70$ a $x + y = 17$. Začneme od súčinu, pretože tu máme menší počet možností pre x a y. Vypíšeme si všetky delitele 70, sú to dvojice $1 \cdot 70$, $2 \cdot 35$, $5 \cdot 14$ a $7 \cdot 10$. Vidíme že len jedna dvojica spĺňa rovnosť $x+y = 17$, a to $7 \cdot 10$.

Odpoveď: V skupine mohlo byť 7 dievčat a 10 chlapcov alebo naopak 7 chlapcov a 10 dievčat.

Komentár: Príklad nebol príliš ťažký. Jediné chyby spôsovalo, keď ste nesprávne pochopili zadanie. A to konkrétne ak ste pochopili že práve 66 zápasov bolo typu ch-ch alebo d-d tak, že aj ch-ch bolo 66 a aj d-d bolo 66. Potom sa vyskytli už iba drobnejšie chybičky, ktoré neboli nijak zásadné.

Príklad č. 7 (opravovali Monča, Maťo K.):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatok, nakreslite si obrázok podľa zadania, aby ste lepšie vedeli pochopiť, aké úsečky alebo uhly myslíme.

Trojuholník CYD je rovnoramenný ($|CY| = |CD|$), preto sa aj jeho vnútorné uhly pri základni musia rovnať. Na potvrdenie výroku v zadaní teda stačí dokázať, že platí $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CYD|$.

Do pravidelného 20-uholníka dokreslíme spojnice stredu so všetkými vrcholmi. Pravidelnosť tohto útvaru spôsobí, že 20 dokreslených úsečiek má rovnakú dĺžku. Vznikne nám takto 20 zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ktorých základňa je strana 20-uholníka a rovnako dlhé ramená sú spojnice stredu s vrcholmi. Teraz vypočítame veľkosť vnútorných uhlov jedného z týchto trojuholníkov. Uhol okolo stredu sa rozdelí na 20 rovnakých uhlov o veľkosti $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$. Súčet vnútorných uhlov každého trojuholníka je 180°, preto sa zvyšné uhly tohoto trojuholníka budú rovnať $\frac{180^\circ - 18^\circ}{2} = 81^\circ$. Vnútorný uhol pri každom vrchole dvadsaťuholníka tvoria dva takéto uhly, preto sa rovná $81^\circ \cdot 2 = 162^\circ$.

V pravidelnom päťuholníku sa vnútorné uhly počítajú podobne. Spojnice stredu s vrcholmi, mnohouholník tiež rozdelia na zhodné rovnoramenné trojuholníky (tentokrát ich je 5). Uhol okolo stredu sa rozdelí na 5 uhlov o veľkosti $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Zvyšné vnútorné uhly trojuholníkov budú mať veľkosť $\frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$. Z toho vyplýva, že sa vnútorné uhly päťuholníka rovnajú $54^\circ \cdot 2 = 108^\circ$.

Vďaka tomuto poznatku vieme od uhla $|\sphericalangle CDE|$ (vnútorný uhol dvadsaťuholníka) odrátať uhol $|\sphericalangle XDE|$ (vnútorný uhol päťuholníka), a teda zistiť veľkosť uhla $|\sphericalangle CDX|$. To je jeden z hľadaných uhlov. To znamená $162^\circ - 108^\circ = 54^\circ = |\sphericalangle CDX|$. Ďalej nám pomôže, ak vyrátame $\sphericalangle DCY$. Ten zistíme odrátaním pravého uhla štvorca $BCYZ$ od vnútorného uhla dvadsaťuholníka $|\sphericalangle BCD|$. Teda $162^\circ - 90^\circ = 72^\circ$. Teraz vieme na základe súčtu vnútorných uhlov trojuholníka dopočítať aj tretí uhol trojuholníka CYD. To znamená $|\sphericalangle CYD| = 180^\circ - 72^\circ - 54^\circ = 54^\circ$. Vidíme, že platí $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CYD|$, z toho vieme, že bod X leží na úsečke DY.

Odpoveď: Výsledkom je samotný postup. Tvrdenie sme dokázali.

Komentár: Celkovo hodnotíme príklad ako nadpriemerne dobre zvládnutý. Väčšina z tých, čo príklad odovzdala, od nás dostala plný počet bodov, avšak našli sa aj takí, ktorí chceli príklad dokázať rysovaním, ale meranie alebo rysovanie spravidla nie je celkom presné. Tým, čo príklad riešili pomocou uhlov sme veľmi nemali za čo strhnúť body, svoj postup ste dostatočne vysvetlili.

Príklad č. 8 (opravovali Tinka, Andy):

Zadanie:

Riešenie: Zdravím pravidelných čitateľov. Príklad sa dal riešiť nasledovne. Prvý hráč sa mal dostať k číslu 50. To znamená, že hráč 2, musel povedať číslo od 40 po 49 (hráč 1 potom prirátal niečo od 1 po 10). Aby hráč 2 musel mať od 40 po 49, tak hráč jedna musel povedať 39. Teraz obdobne ďalší krok. Aby sa hráč 1 dostal k číslu 39, tak hráč 2, musel povedať niečo medzi 29 až 38 (v závislosti od tohto čísla povedal hráč jedna doplnok do 39). Takže hráč 1 povedal číslo 28. Aby sa hráč 1 dopracoval k 28, tak hráč 2 musel povedať niečo medzi 18 až 27 (potom hráč 1 prirátal doplnok k 28). Opäť, aby minimálna hodnota, čo mohol hráč 2 povedať bola 18, tak hráč 1 musel povedať 17. Aby sa hráč 1 dostal k 17 tak predtým musel povedať hráč 2 niečo medzi 7 a 16. Aby hráč 2 musel povedať najmenej 7, tak hráč 1 povedal na začiatku hry 6. Tým pádom sa stáva víťazom spôsobom uvedeným vyššie.

Pri takejto úlohe, kde hľadáme víťaznú stratégiu, je užitočné začať od konca. Postupne si vypisujeme čísla, pri ktorých hráč vyhrá a čísla, pri ktorých hráč prehrá. Samozrejme za predpokladu, že obaja poznajú stratégiu. V našej úlohe sú tzv. víťazné čísla 6, 17, 28, 39 a 50.

Odpoveď: Áno, je dôležité, aby ten kto chce vyhrať začal, a to práve číslom 6.

Komentár: Tí, ktorí nečítajú všetky zadania príkladov, sa zrejme nepotešia. Tento príklad bol skutočne ľahký a veľa z Vás získalo 10 bodov. Tí, čo dostali menej ako 10 bodov, tam mali buď len výsledok, alebo že sa treba dostať k číslu 39, no nič viac. Za to sme dávali 3 body. K ostatným sme pristupovali individuálne. Ale pekne ste to zvládli.

Príklad č. 9 (opravoval Phil):

Zadanie:

Riešenie: Toto riešenie je inšpirované riešením Hanky Ďurajkovej.

Na začiatok môžeme vylúčiť 1,2,3-ciferné čísla. Je to preto, že keď škrtneme z jednociferného čísla jednu číslicu, nič nám neostane. Jediné dvojciferné číslo deliteľné číslom 73 je samotné 73. Pre tento prípad ale riešenie nesedí (73:73=1 a nie 3). A teraz trojciferné čísla. Každé trojciferné číslo xyz si vieme rozpísať v tvare:

$$x \cdot 100 + y \cdot 10 + z \cdot 1$$

Napríklad pre číslo 234 platí:

$$2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

Ak si za číslo yz dosadíme a, zo zadania (Nájdite všetky čísla, ktoré sa po preškrtnutí prvej číslice 73-krát zmenšia.) si prepíšeme:

$$x \cdot 100 + a = 73 \cdot a$$

$$100 \cdot x = 72 \cdot a$$

$$25 \cdot x = 18 \cdot a$$

A aké najmenšie čísla za x a a musíme dosadiť? Správne! $x = 18$ a $a = 25$, aby platilo:

$$25 \cdot 18 = 18 \cdot 25$$

Vyšlo nám teda, že $x = 18$. Zamyslime sa. Ak by bolo x dvojciferné, číslo $x \cdot 100 + \dots$ by bolo až štvorciferné. A to nám nesedí. Preto pre trojciferné čísla riešenie neexistuje.

Prejdime na štvorciferné čísla. Tie si znova vieme napísať v tvare z $xyza$ na:

$$x \cdot 1000 + y \cdot 100 + z \cdot 10 + a \cdot 1$$

Ak si za yza dosadíme b, platí:

$$x \cdot 1000 + b = 73 \cdot b$$
$$1000 \cdot x = 72 \cdot b$$
$$125 \cdot x = 9 \cdot b$$

Rovnica má riešenie, ak $x = 9$ a $b = 125$, aby platilo:

$$125 \cdot 9 = 9 \cdot 125$$

V tomto prípade už vieme napísať číslo $x \cdot 1000 + b$ ako štvorciferné, teda riešením bude:

$$9 \cdot 1000 + 125 \to 9125$$

Skúška správnosti $9125 : 73 = 125$ a máme prvé riešenie.

Poďme na päťciferné čísla. Tak ako u predchádzajúcich, aj tu máme číslo $xyzab$, kde za $yzab$ dosadíme c a platí:

$$x \cdot 10000 + c = 73 \cdot c$$
$$10000 \cdot x = 72 \cdot c$$
$$1250 \cdot x = 9 \cdot c$$

Riešením je $x = 9$ a $c = 1250$, aby platilo:

$$1250 \cdot 9 = 9 \cdot 1250$$

Číslo $x \cdot 10000 + c$ napíšeme ako päťciferné:

$$9 \cdot 10000 + 1250 \to 91250$$

Skúška správnosti $91250 : 73 = 1250$ a máme druhé riešenie.

Prejdime na šesťciferné čísla, kde zopakujeme postup. V čísle $xyzabc$ dosadím za $yzabc$ číslo d a platí:

$$x \cdot 100000 + d = 73 \cdot d$$

Riešením je $x = 9$ a $d = 12500$. Číslo $x \cdot 100000 + d$ napíšeme ako päťciferné:

$$9 \cdot 100000 + 12500 \to 912500$$

Skúška správnosti $912500 : 73 = 12500$ a máme tretie riešenie.

Jediné sedemciferné číslo z intervalu 1 až 1000000 je 1000000. To však nieje deliteľné číslom 73, a preto ho vylúčime.

Iné riešenie: Toto riešenie je inšpirované riešením Olivera Ferianca.

Toto riešenie napíšem trochu skrátene vzhľadom k tomu, že je celé napísané aj vyššie... Po vylúčení jedno, dvoj a troj–ciferných čísel (popísané vyššie) prejdeme rovno na štvorciferné. Príklad: Máme číslo 8932, po preškrtnutí prvej číslice sa číslo zmenší o 8000.

V rovniciach si to vieme napísať ako: $(abcd - a000) \cdot 73 = abcd$. Za číslo $abcd$ si dosadíme x, za číslo a si dosadíme čísla 1 až 9. Hľadáme deliteľné čísla. Z rovnice nám vypadne číslo periodické alebo neperiodické(deliteľné): Pre $a = 1$:

$$(x - 1000) \cdot 73 = x$$
$$73 \cdot x - 73000 = x$$
$$72 \cdot x = 73000$$
$$x = 1013,8888\ldots$$

Ak je za a dosadené 2 až 9, to je ukázané v tabuľke 1.

Jedine pri $a = 9$ nám vyšlo neperiodické číslo. Teda 9125 je správne riešenie. Po zopakovaní rovnakého postupu pri 5 a 6-ciferných číslach dostaneme zvyšné dve riešenia.

Iné riešenie: Toto riešenie je inšpirované riešením Katky Liptákovej, znova trochu skrátené.

Príklad sa dá riešiť tak, že nájdeme „koncovky", ktoré po vynásobení číslom 73 ostanú rovnaké. Sú to: 125, 250, 750, 75, 00, 50. Po odskúšaní všetkých dostanem správne riešenie:

$$125 \cdot 73 = 9125$$

Ďalšie riešenia dostaneme vynásobením desiatkou tak, ako v predchádzajúcich príkladoch.

Odpoveď: Hľadané čísla sú 9125, 91250 a 912500.

Komentár: Príklad sa dal riešiť mnohými spôsobmi. Tie úplne najkrajšie som dal ako vzorové riešenia, to ale neznamená, že ostatní to mali nejako zle :) Okrem opisovačov (ktorých touto cestou zase karhám), neboli dve úplne rovnaké riešenia. Všetky boli originály :) Najviac chýb robili tí, ktorí vypisovali možnosti. Niektorí celkom logicky vylučovali, čím sa logicky dostali k správnemu výsledku, iní vypísali úplne všetko, ale pomýlili sa pri ťukaní na kalkulačke, no a niektorí len napísali, že použili

Pre $a = 2$: $(x - 2000) \cdot 73 = x$ $x = 2027,7777\ldots$	Pre $a = 6$: $(x - 6000) \cdot 73 = x$ $x = 6083,3333\ldots$
Pre $a = 3$: $(x - 3000) \cdot 73 = x$ $x = 3041,6666\ldots$	Pre $a = 7$: $(x - 7000) \cdot 73 = x$ $x = 7097,2222\ldots$
Pre $a = 4$: $(x - 4000) \cdot 73 = x$ $x = 4055,5555\ldots$	Pre $a = 8$: $(x - 8000) \cdot 73 = x$ $x = 8111,1111\ldots$
Pre $a = 5$: $(x - 5000) \cdot 73 = x$ $x = 5069,4444\ldots$	Pre $a = 9$: $(x - 9000) \cdot 73 = x$ $\underline{x = 9125}$

Tabuľka 1: Dosadené za a =2..9

kalkulačku a voilà výsledok (tam šlo trochu viac bodov dole). Ešte by som chcel pripomenúť, že chceme celý postup, ako ste sa k výsledku dostali. Napísať nejakú rovnicu alebo príklad, ale nepopísať v nej, ako ste k nej došli („však vedúci si to domyslí...“) nieje dobrý popis postupu. Riešenia ma ale viac-menej potešili, keďže som mohol častokrát dávať zaslúžených 10 bodov.

Prémia (opravoval Kozzy):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Kráľ hľadá nového strážcu kráľovskej pokladne. O tento úrad sa ale smie uchádzať iba ten, kto splní túto úlohu: Uchádzač bude zavedený do zatemnenej miestnosti, v ktorej je na podlahe 50 mincí, z toho 18 leží hore lícom a zvyšok rubom. Jeho úlohou je rozdeliť mince na dve (nie nutne rovnako veľké) časti tak, aby počet mincí ležiacich lícom nahor bol v oboch týchto častiach rovnaký. Je povolené ľubovoľné mince otáčať, ale keďže je tma a mince sú staré, nijako sa nedá zistiť, ktoré mince sú ako otočené. Keď teda uchádzač nejakú mincu otáča, netuší, čím bude otočená hore. Vie iba, že ju otočil. Jeden váš známy by sa rád stal strážcom pokladne, ale so skúškou si nevie poradiť. Dokážete mu poradiť postup, pomocou ktorého rozdelí mince na dve časti tak, aby počet mincí ležiacich lícom nahor bol v oboch častiach rovnaký? Pre počet mincí ležiacich rubom nahor to už platiť nemusí.

Riešenie: Vieme len, že máme 18 z 50 mincí otočených lícom nahor. Vieme ich na základe tejto informácie rozdeliť na dve požadované kôpky? Nevieme. Takže určite budeme aj čosi otáčať.

Ale koľko mincí otočiť? Povedzme, že z týchto 50 mincí sme otočili M, pričom z nich x bolo otočených pôvodne lícom nahor (ani jedno z čísel zatiaľ nepoznáme). Po otočení tie mince, ktoré boli pôvodne lícom nahor, budú nahor rubom - je ich x. Všetky ostatné, to znamená $M - x$ mincí, budú po otočení lícom nahor.

Prizrime sa ešte bližšie zvyšným minciam, tým, ktoré sme neotáčali. Tam je $18 - x$ mincí (pretože lícom nahor bolo pôvodne otočených spolu 18 mincí, z toho x bolo v druhej skupine) otočených lícom nahor a ostatné, ich počet nás nebude zaujímať, sú nahor rubom.

Máme teda $18 - x$ mincí v neotočenej časti a $M - x$ v otočenej časti otočených hore lícom. Tieto dve čísla budú rovnaké, ak sme na začiatku otočili 18 mincí, teda $M = 18$. Teda v otočenej časti je presne toľko isto mincí otočených lícom nahor ako v nedotknutej, a to je presne to čo sme chceli dokázať.

Odpoveď: Otočíme 18 mincí, z ktorých vytvoríme jednu kôpku. Z ostatných vytvoríme druhú kôpku.

Komentár: Takmer všetci, ktorí mali riešenie, ho mali správne a za plný počet bodov. Váš postup riešenia vyzeral vždy tak, že ste povedali, že otočíme 18 mincí a dokázali ste, že v takom prípade bude na kôpkach rovnako mincí, čo je nemenej správny postup, ako ten uvedený vyššie. Tí, ktorým sa chcelo prepisovať doplnené zadanie, aj keď príklad nevyriešili, boli odmenení jedným bodom.