Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2009/2010

Príklad č. 1 (opravovala Danka):

Zadanie:

Riešenie: Vypíšme si najprv všetky číslice, ktorých zrkadlovým digitálnym obrazom je tiež nejaká číslica. Sú to: 0, 1, 2, 5, 8. Ich zrkadlovými obrazmi sú v takomto poradí číslice 0, 1, 5, 2, 8.

Keď už poznáme zrkadlové číslice, vieme si spísať aj všetky zrkadlové časy, ktoré nám môžu digitálne hodinky ukázať: 00:00, 01:10, 02:50, 05:20, 10:01, 11:11, 12:51, 15:21, 20:05, 21:15, 22:55.

Lenže pozor, v zadaní sa nás pýtajú len na časy medzi 8:00 a 21:00. Tomuto časovému ohraničeniu zodpovedá len 5 z vyššie spomenutých časov, a to: 10:01, 11:11, 12:51, 15:21, 20:05.

Odpoveď: Na svoje hodinky sa pozrel 5-krát.

Komentár: Príklad našej jedinej riešiteľke problémy nerobil, takže nebolo ani potrebné strhávať body:)

Príklad č. 2 (opravovala gubika):

Zadanie:

Riešenie: Príklad by sme mohli riešiť tipovaním, ale to by mohlo trvať veľmi dlho. Oveľa jednoduchšie bude nájsť nejaké číslo v reťazci, ktoré vieme s istotou určiť. Pomocou neho dopočítame celý riadok. Tak budeme pokračovať ďalej, až doplníme všetkých 16 čísel.

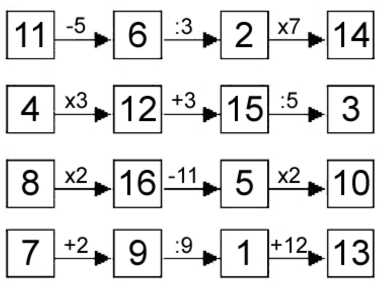
Najprv sa pozrime na štvrtý riadok. Tretie políčko dostaneme vydelením predchádzajúceho deviatimi, teda číslo v druhom políčku je určite deliteľné deviatimi. Z čísel od 1 do 16 je také jediné číslo 9. Keď poznáme jedno políčko v poslednom riadku, vieme ho ľahko dopočítať celý. Keď k číslu na prvom políčku pripočítame 2, dostaneme číslo v druhom. Číslo v prvom políčku musí byť teda o 2 menšie, ako na druhom, čo je 7. V treťom políčku bude $9 : 9 = 1$ a v štvrtom $1 + 12 = 13$. Posledný riadok máme teda vyplnený. Použili sme čísla 7, 9, 1, 13 v takomto poradí.

Teraz sa pozrime na druhý riadok. Číslo v druhom políčku musí byť deliteľné 3, lebo ho dostávame vynásobením prvého políčka tromi. Rovnako je tromi deliteľné aj tretie políčko - keď k číslu deliteľnému tromi pripočítam tri, tak tento súčet musí byť tiež deliteľný tromi. Tretie políčko musí byť zároveň deliteľné piatimi - delíme ho piatimi a potrebujeme celočíselný výsledok. Z čísel, ktoré máme k dispozícii je tromi a zároveň piatimi deliteľné iba číslo 15. Poznáme teda tretie políčko druhého riadku. Pomocou neho dopočítame zvyšné. V štvrtom políčku bude $15 : 5 = 3$. Aby sme sa dostali k číslu v druhom, musíme od čísla na treťom odpočítať 3, vyjde nám 12 $(15 - 3 = 12)$. Číslo v prvom políčku zistíme tak, že číslo v druhom vydelíme tromi: $12 : 3 = 4$. Druhý riadok sme tiež hravo zvládli. Použili sme čísla 4, 12, 15, 3 v takomto poradí.

Pokračujeme prvým riadkom. Druhé políčko máme deliť tromi, teda číslo v druhom políčku musí byť deliteľné tromi. Keďže každé z čísel 1 až 16 môžeme použiť len raz, ostáva nám už len jedno číslo deliteľné tromi, ktoré sme ešte nepoužili, a to 6. Teda v druhom políčku bude číslo 6. Dopočítame zvyšné tri políčka, k druhému políčku pripočítame 5, aby sme dostali prvé, to bude 11. Aby sme dostali tretie vydelíme druhé tromi, teda tretie je 2. To vynásobíme siedmimi a dostaneme 14. Prvý riadok je vyplnený zaradom číslami 11, 6, 2, 14.

Ostávajú nám čísla 5, 8, 10 a 16. Tie musíme usporiadať do tretieho riadku. Od druhého políčka odpočítavame 11, aby sme dostali tretie - toto číslo musí byť väčšie ako 11. Takéto číslo ostalo iba jedno a to 16. Od neho odvodíme tretie, odpočítaním 11 a dostaneme 5. Druhé políčko je dvojnásobkom prvého, teda v prvom bude 8. Pre posledné políčko ostáva číslo 10, a to tam skutočne patrí, lebo $5 \cdot 2 = 10$. Čísla v treťom riadku sú zaradom 8, 16, 5, 10.

Odpoveď: Výsledné usporiadanie zámkov môžete vidieť na obrázku č. 1



Obrázok 1: riešenie príkladu 2

Komentár: Príklad ste všetci zvládli úplne super. Pochvala:)

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Bocky, Majo):

Zadanie:

Riešenie: Keďže všetky štyri sčítance mali na mieste jednotiek číslicu D a iba tieto číslice ovplyvňujú číslicu na mieste jednotiek v našom súčte, tak je dobré začať práve odhaľovaním jej hodnoty. Rovnaké písmená označujú podľa zadania rovnakú číslicu, teda musíme nájsť takú číslicu D, ktorá sa po vynásobení štyrmi (sčítavame ju štyrikrát) bude rovnať číslu s poslednou cifrou 2 $(4 \cdot D = x2$, keďže číslica v súčte na mieste jednotiek je 2). Toto platí pre dve číslice a to $D = 3$ $(4 \cdot 3 = 12)$ a $D = 8$ $(4 \cdot 8 = 32)$. Skúsime dosadiť obe možnosti a uvidíme, ktorá je správna.

1. $D = 3$
   Keď si dosadíme do nášho súčtu $D = 3$, vyjde nám $4 \cdot D = 12$, posledná cifra bude 2, zvyšok 1. Posunieme sa o jednu cifru doľava a na poslednú dvojku zatiaľ zabudneme. Teraz musíme nájsť takú číslicu C, ktorá sa po vynásobení tromi (číslicu C pričítavame trikrát) bude rovnať nejakému číslu, ktoré má poslednú cifru 1 ($3 \cdot C = x1$). Keď totiž k tomuto číslu pripočítame zvyšok zu súčtu jednotiek (1 lebo $4 \cdot 3 = 12$), má nám vyjsť číslo, ktoré má dvojku na mieste jednotiek ($3 \cdot C + 1 = x2$, keďže číslica v súčte na mieste desiatok je 2). Jediná možnosť, ktorá vyhovuje je $C = 7$ ($3 \cdot 7 = 21$), zvyšok je 2.
   Opäť sa posunieme o jednu cifru doľava. Teraz potrebujeme nájsť takú číslicu B, ktorá sa po vynásobení dvomi bude rovnať nejakému číslu, ktoré končí na 0 ($2 \cdot B = x0$). Ak by sme totiž k nemu prirátali zvyšok zo súčtu desiatok, vyjde nám $2 \cdot B + 2 = x2$, lebo v súčte je dvojka aj na mieste stoviek). Pre takéto B nám vyhovuje iba 5, pretože žiadna z číslic A, B, C, D nemôže byť 0, lebo každá z nich sa nachádza na začiatku jedného čísla. Keďže $2 \cdot B = 10 + 2 = 12$, zvyšok je 1. Zostáva nám už určiť iba prvú cifru, A.
   Číslica A sa nachádza v súčte iba raz a teda musí byť rovná číslu 1, aby platilo $1 \cdot A + 1 = 2$ (čo musí platiť, pretože v súčte je na mieste tisícok dvojka a v tomto prípade musíme dostať jednociferné číslo, lebo A je prvá cifra). Teda $A = 1$ a sčítance ABCD, BCD, CD a D majú hodnoty 1573, 573, 73 a 3.
2. $D = 8$
   Keď dosadíme do súčtu $D = 8$, vyjde nám posledná cifra 2 so zvyškom 3 ($4 \cdot 8 = 32$). Posunieme sa o jednu cifru doľava a na poslednú dvojku opäť zabudneme. Teraz musíme nájsť takú číslicu C, ktorá sa po vynásobení tromi bude rovnať číslu, ktoré má poslednú cifru 9 ($3 \cdot C = x9$), pretože keď k tomuto číslu pripočítame zvyšok 3, musí nám vyjsť $x2$ ($3 \cdot C + 3 = x2$). Jediná číslica, ktorá tomu vyhovuje je $C = 3(3 \cdot 3 = 9)$. Tentokrát nám zostal zvyšok $1(3 \cdot 3 + 3 = 12)$.
   Opäť sa posunieme o jednu cifru doľava. Teraz potrebujeme nájsť takú číslicu B, ktorá sa po vynásobení dvomi bude rovnať nejakému číslu, ktoré končí na 1 ($2 \cdot B = x1$), pretože keď k tomuto číslu pripočítame zvyšok 1 (zo súčtu desiatok rovnému 12), musí nám vyjsť $x2(2 \cdot B + 1 = x2)$. Avšak dvojnásobok žiadnej číslice (ani žiadneho iného celého čísla) nemôže končiť jednotkou (musí byť párny) a preto žiadna taká číslica B neexistuje a teda druhá možnosť, $D = 8$, nemá riešenie.

Odpoveď: Čísla ABCD, BCD, CD a D sú rovné 1573, 573, 73 a 3.
Komentár: Väčšina z vás si s príkladom poradila veľmi dobre. Niektorým sme strhli 1-2 body za nedostatočné vysvetlenie niektorých krokov. Ak ste preverili iba možnosť $D = 3$ strhli sme vám 4 body. Pokiaľ ste našli riešenie iba akoby náhodou, teda vôbec ste sa nesnažili vysvetliť, či je možné (resp. prečo nie je možné) aj iné riešenie, dostali ste 2 body. V pravidlách je totiž jasne napísané, že vašou úlohou je napísať aj či a prečo sú vaše riešenia jediné.

Príklad č. 4 (opravovali Tinka, Marka, Phil):

Zadanie:
Riešenie: Štyria krtkovia nám hovoria o jednom čísle. Jeden z nich však klame a my musíme zistiť, ktorý to je.

Vyskúšame si dosadiť postupne všetkých krtkov ako klamárov a budeme kontrolovať, či ak daný krtko klame, tak zvyšní môžu hovoriť pravdu:

1. Klamár bol Ann.
   O hľadanom čísle vieme povedať, že nie je dvojciferné, je deliteľom čísla 150, nie je to číslo 150 a je násobkom 25. Vypíšme si teda najprv delitele čísla 150: 150, 75, 50, 30, 25, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1. Z nich vylúčime dvojciferné čísla a ostanú nám tieto: 150, 6, 5, 3, 2, 1. Aby Caius neklamal, tak dané číslo nesmie byť 150. Ostali nám iba jednociferné čísla, ale tie určite nie sú celočíselným násobkom 25. Z toho vyplýva, že ak by Ann klamal, tak by žiadne číslo nevyhovovalo zadaniu. Ann teda určite neklame.
2. Klamár bol Bojko.
   Číslo je dvojciferné, nie je to deliteľ čísla 150, nie je to 150 a je deliteľné číslom 25. Vieme, že jediné dvojciferné čísla deliteľné číslom 25 sú 75, 50 a 25. Všetky tri sú však zároveň deliteľmi čísla 150. To odporuje tvrdeniu, že Bojko klame, takže Bojko takisto klamať nemôže.
3. Klamár bol Caius.
   Číslo je dvojciferné, je to deliteľ čísla 150, je to 150 a je násobkom čísla 25. V tomto prípade sa vylučujú tvrdenia, že dané číslo je dvojciferné a je to 150, preto Caius tiež nemohol klamať.
4. Klamár bol Den.
   Má platiť, že číslo je dvojciferné, je to deliteľ čísla 150, nie je to 150 a nie je deliteľné číslom 25. Vypíšeme si dvojciferné delitele čísla 150: 75, 50, 30, 25, 15, 10. Z nich teraz vylúčime násobky čísla 25. Ostanú nám: 30, 15 a 10. Tieto čísla nie sú 150, čiže sú splnené všetky podmienky.

Rozobratím všetkých štyroch možností sme zistili, že klamať mohol iba Den, a že krtkovia rozprávali o jednom z čísel 10, 15 a 30.
Odpoveď: Klamal krtko Den.
Komentár: Veľa z vás sa dostalo k správnemu výsledku, ale pozor: ak ste na to išli vylučovacou metódou a nakoniec vám zostal už len Den, musíte overiť, či to pre neho naozaj platí, že on je klamár. Príklad totižto nemusí mať žiadne riešenie. Taktiež pozor na slová ako deliteľ čísla 150 a deliteľné 150-imi, lebo to je rozdiel. Inak ste nás veľmi potešili mnohými peknými riešeniami :)

Príklad č. 5 (opravovali Monča, ViRPo):

Zadanie:

Riešenie: Najprv zistíme počet dvojciferných osudových čísel (ďalej len OČ), ktoré neskôr využijeme aj pri zisťovaní trojciferných OČ.

Za prvú cifru nejakého dvojciferného čísla si zvoľme napríklad číslo 6 teda x. Za druhú cifru môžeme dosadiť číslo $5, 4, 3, 2, 1$, alebo 0, aby sa číslo zľava doprava zmenšovalo a teda bolo osudovým. Takže za každú cifru x vieme dosadiť číslo od $x - 1$ po 0 tak, aby bolo toto dvojciferné číslo určite osudovým a počet cifier, ktoré vieme dosadiť za druhú cifru sa rovná číslu x. Za prvú cifru môžeme dosadiť len čísla 1 až 9 (nulu nie, pretože číslo má byť dvojciferné), takže počet dvojciferných OČ je $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Počet trojciferných OČ zistíme pomocou dvojciferných OČ nasledovne: Prvú cifru trojciferného OČ si označíme y a druhú x. Keďže cifry OČ sa zľava doprava zmenšujú, musí byť x menšie ako y. Taktiež vieme, že posledná cifra môže byť najmenej 0, x môže byť preto najmenej 1 a y môže byť tým pádom najmenej 2. To znamená, že y môže predstavovať čísla od 9 po 2 a z toho odvodíme x, ktoré musí byť najviac $y - 1$ (aby bolo číslo osudové) a najmenej 1. x môže nadobudnúť hodnoty od 8 po 1. Ak teda vieme, aké sú všetky dvojciferné OČ, môžeme si vypísať každý y, to znamená čísla od 9 po 2 a vytvoriť z nich trojciferné OČ tým, že za y dopíšeme každé dvojciferné osudové číslo s menším x ako y. Po zrátaní všetkých vypísaných čísel zistíme, že trojciferných OČ je 120.

Počet všetkých OČ je teda $120 + 45 = 165$.

Odpoveď: V náhrdelníku máme 165 kameňov.

Komentár: Príklad bol naozaj ľahučký a pomýliť sa dalo len v pochopení zadania. Veľa z vás napísalo, že zadanie nie je konkrétne, pretože neuvádza, či sa cifry OČ zmenšujú vždy o 1 alebo o ľubovoľnú hodnotu. Ak však zadanie konkrétne neuvedie, ako sa majú cifry zmenšovať, je myslené všeobecne. Ak sa teda majú cifry podľa zadania zmenšovať zľava doprava, nemusia sa zmenšovať vždy o jedna. Inak, skoro každý, kto správne pochopil zadanie, príklad riešil správne.

Príklad č. 6 (opravovali Peťo, Andy):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si musíme uvedomiť, čo vieme o trojuholníkoch a o uhloch v nich:

- Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°.
- V rovnoramennom trojuholníku sú uhly, ktoré zvierajú ramená so základňou rovnaké.
- Ak sú dva uhly nejakého trojuholníka rovnaké ako dva uhly iného trojuholníka, potom je aj tretí uhol v oboch trojuholníkoch rovnaký (takéto trojuholníky sa nazývajú podobné).

Veľkosti uhlov ABC a BAC budú rovnaké, pretože sú to uhly medzi ramenami a základňou rovnoramenného trojuholníka ABC. Označme si ich veľkosť α a veľkosť ACB si označme β.

Veľkosti uhlov ABD a BDA budú tiež rovnaké, lebo sú to uhly medzi ramenami a základňou rovnoramenného trojuholníka ABD. Uhol ABD má veľkosť α a uhly ABD a BDA sú rovnaké, takže aj $|\sphericalangle BDA| = \alpha$. Trojuholníky ABD a ABC sú oba rovnoramenné s uhlom α pri základni, takže aj uhly oproti základni budú v oboch trojuholníkoch rovnaké. V trojuholníku ABC sme si túto veľkosť označili β, teda aj $|\sphericalangle DAB| = \beta$.

Veľkosti uhlov ACD a DAC budú opäť rovnaké, pretože sú to uhly medzi ramenami a základňou rovnoramenného trojuholníka ADC. A keďže $|\sphericalangle ACD| = \beta$, tak aj $|\sphericalangle DAC| = \beta$.

Vidíme, že uhol BAC, ktorého veľkosť sme si označili α, je zložený z uhlov DAB a DAC, ktorých veľkosti sú obidve β. To znamená, že α je dvakrát väčší uhol ako β.

Vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, teda v trojuholníku ABC platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB| &= 180^\circ \\ \alpha + \alpha + \beta &= 180^\circ \end{aligned}$$

(uhol α si vieme nahradiť $2 \cdot \beta$)

$$\begin{aligned} 2\beta + 2\beta + \beta &= 180^\circ \\ 5\beta &= 180^\circ \\ \beta &= 36^\circ \end{aligned}$$

Zistili sme, že $\beta = 36^\circ$, teraz už iba potrebujeme zistiť, čomu sa rovná α:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta \\ \alpha &= 2 \cdot 36^\circ \\ \alpha &= 72^\circ \end{aligned}$$

Teraz už vieme povedať, aké sú uhly v trojuholníku ABC.

Odpoveď: Uhly v trojuholníku ABC sú: $|\sphericalangle ABC| = 72^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 72^\circ$ a $|\sphericalangle ACB| = 36^\circ$

Komentár: Tento príklad bol pomerne jednoduchý a veľa z vás napísalo správnu odpoveď, ale žiaľ sme vám museli strhnúť nejaké tie bodíky za to, že ste nedostatočne odôvodnili, prečo sa niektoré uhly rovnali.

Príklad č. 7 (opravovali Kozzy, Juro):

Zadanie:

Riešenie: Najprv zistíme kto bol posledný, aby sme vedeli kto vôbec neklamal. Tak si skúsime všetkých dosadiť na posledné miesto a uvažujeme, že v danom prípade vôbec neklamali.

1. Posledný prišiel do chaty Janus. Jeho veta „Joseph prišiel do chatrče ešte neskôr ako ja“ je však v tomto prípade nepravdivá, čo je spor s predpokladom, že Janus neklame. A teda Janus posledný neprišiel.
2. Posledný prišiel Kornélius. Rovnako, ako v prípade Janusa, výrok „Joseph prišiel posledný“ je za daných podmienok nepravdivý, čo je spor s predpokladom, že Kornélius neklame. Ani Kornélius nebol posledný.
3. Posledný prišiel Traian. Kornéliusov výrok: „Joseph prišiel posledný“ je nepravdivý, keďže predpokladáme, že posledný prišiel Traian. Kornélius tiež tvrdí, že Janus prišiel do chatrče pred ním, čo musí byť pravda, keďže každý klamal najviac raz. Joseph však hovorí, že do chatrče prišiel posledný, čo je lož (lebo predpokladáme, že posledný prišiel Traian), no rovnako jeho tretí výrok, „Prvý prišiel do chatrče Kornélius“, je nepravdivý (ako sme zistili podľa výrokov Josepha). To znamená, že Joseph klamal dvakrát, čo je v spore so zadaním, ktoré hovorí, že každý okrem posledného klamal práve raz. Takže ani Traian neprišiel posledný.
4. Posledný prišiel Joseph. Keďže jeho výroky sú pravdivé, prvý prišiel Kornélius. Kornélius teda musel klamať vo vete: „Do chatrče som prišiel, keď tam Janus už bol.“ Zvyšné dva výroky sú teda pravdivé. Traian klamal vo vete: „Prišiel som až po Josephovi“, keďže predpokladáme, že Joseph prišiel posledný. Opäť sú ostatné dva výroky pravdivé. Janusove výroky: „Prišiel som do chatrče neskôr ako Kornélius“ a „Joseph prišiel do chatrče ešte neskôr ako ja“ sú oba pravdivé, teda nepravdivý je výrok „Ja som ich neukradol“. Teda peniaze ukaradol Janus. Traian klame, keď tvrdí, že prišiel neskôr, ako Joseph, keďže Joseph prišiel posledný, jeho ostatné dva výroky môžu byť pravdivé. Táto možnosť spĺňa zadanie aj predpoklad, že Joseph prišiel posledný, teda hľadaným vinníkom je Janus. Žiadne ďalšie možnosti nie sú, teda toto je aj jediné možné riešenie.

Odpoveď: Janus ukradol všetky peniaze!

Komentár: Väčšina použila podobný postup, ako sme vám napísali vo vzoráku, ale našli sa aj iní a ich riešenie bolo samozrejme ocenené 10 bodmi, ak bolo správne. Viacerí z vás predpokladali, že Joseph prišiel posledný, a potom, keď vám vyšla správna možnosť, ste už o inom riešní neuvažovali, za čo ste dostávali maximálne 5 bodov. Ak ste zabudli overiť, že úloha môže mať riešenie, prišli ste o 1 bod.

Príklad č. 8 (opravovali Uľa, Jančo):

Zadanie:

Riešenie: Najmenší možný súčet z týchto 100 mešcov (ktoré idú postupne) môže byť $1 + 2 = 3$, najväčší $99 + 100 = 199$. To znamená, že existuje 197 rôznych súčtov (všetky sa nachádzajú medzi 3 a 199).

Nech teda máme 21 úplne hocijakých mešcov z tých 100. Poďme vypočítať, koľko existuje rôznych dvojíc mešcov. Zoberme prvý. Ten sa môže nachádzať v nejakej dvojici s dvadsiatimi ďalšími rôznymi mešcami, teda 20 možností. Druhý mešec sa tiež nachádza v 20 dvojiciach, jednu z nich sme však už zarátali (tú, kde je v dvojici s prvým), takže ju nebudeme rátať znova. Pribudne nám teda ďalších 19 možnosí. A tak pokračujeme ďalej, až pri predposlednom mešci sme už zarátali všetky jeho dvojice okrem jednej (tej s posledným mešcom), a nakoniec pri poslednom mešci sme už všetky dvojice zarátali. Celkový počet možností, je teda $20 + 19 + 18 + \cdots + 3 + 2 + 1 = 210$. (Tento počet môžeme vyrátať aj tak, že každý z n mešcov može byť v dvojici so zvyšnými, teda $n - 1$ mešcami, čo dáva $n \cdot (n - 1)$ možností. Každú sme započítali dvakrát, raz pri jednom mešci z každej dvojice, raz pri druhom. Vydelíme teda tento počet dvomi, čím dostaneme celkový počet dvojíc pre n mešcov $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. A naozaj, po dosadení 21 za n dostávame $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$).

Vzhľadom na to, že možných súčtov je len 197, tak medzi tými 210 možnými dvojicami musia byť nejaké súčty rovnaké.

Odpoveď: Rybár mohol vždy vybrať také štyri mešce, z ktorých v dvoch bolo rovnako veľa grošov ako v druhých dvoch.

Komentár: Tento príklad bol dosť ťažký na pochopenie. Niektorí ste ho zle pochopili a bolo zle. Ak ste ho dobre pochopili, často sa stávalo, že ste mali úplne dobré riešenie, za ktoré sme dali 10 bodov.

Príklad č. 9 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania vieme, že čísla, ktoré máme nájsť sú menšie ako 10000. Čiže to budú štvorciferné a menšie čísla. Avšak v trojciferných číslach je maximálny možný ciferný súčin $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$, čo je menšie ako 890 (no zo zadania vieme, že tento súčin ma byť väčší ako 890 a menší ako 900) a tak isto dvoj- a jednociferné čísla nemajú dostatočný súčin. Hľadáme teda iba štvorciferné čísla.

Rozložíme si všetkých 9 možných súčinov (od 891 do 899) na prvočísla, aby sme zistili, aké cifry bude môcť obsahovať výsledné číslo:

$$
\begin{aligned}
891 &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 11\\
892 &= 2\cdot 2\cdot 223\\
893 &= 19\cdot 47\\
894 &= 2\cdot 3\cdot 149\\
895 &= 5\cdot 179\\
896 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\\
897 &= 3\cdot 13\cdot 23\\
898 &= 2\cdot 449\\
899 &= 29\cdot 31
\end{aligned}
$$

Jediný súčin, ktorý by mohol byť ciferným súčinom nejakého čísla je 896. Pri ostatných rozkladoch je vždy aspoň jedno prvočíslo väčšie ako 9, čo však nemôže, keďže tieto prvočísla, a kombinácie ich súčinov, budú vo výslednom čísle ciframi, teda jednocifernými číslami.

Keďže potrebujeme nájsť štvorciferné čísla musíme 896 rozložiť na súčin štyroch jednociferných čísel (teda cifier). Dostaneme dve možnosti $4\cdot 4\cdot 8\cdot 7$ alebo $2\cdot 8\cdot 8\cdot 7$. Čísla, ktoré hľadáme sú všetky kombinácie týchto cifier a to: 4487, 4478, 4784, 4874, 8744, 7844, 7484, 8474, 4784, 4874, 8447, 7448, 8827, 8872, 8728, 8278, 2788, 7288, 7828, 2878, 8728, 8278, 2887, 7882.

Odpoveď: Hľadané čísla sú: 4487, 4478, 4784, 4874, 8744, 7844, 7484, 8474, 4784, 4874, 8447, 7448, 8827, 8872, 8728, 8278, 2788, 7288, 7828, 2878, 8728, 8278, 2887 a 7882.

Komentár: Príklad nebol príliš ťažký a väčšina ho zvládla na plný počet. Najčastejšie chyby boli v tvrdení, že čísla 899 a 893 sú prvočísla. Alebo ste neukázali, prečo trojciferné a mešie čísla určite nemôžeme dostať.

Prémia (opravovali Laco, Dada, Domča, Ema):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Ešte predtým ako sa vydali do mesta, nechali zopár drozdov, aby zistili, ako to vyzerá. Zistili, že pôdorys mesta je zhruba kruh. Rozdelili si ho tromi čiarami tak, že ak by mali v tomto kruhu vyznačené ručičkové hodinky, tak by v každej vzniknutej časti bol súčet čísel rovnaký. Ako si rozdelili mesto? Mohli to urobiť viacerými spôsobmi?

Riešenie: Úlohou teda je rozdeliť ciferník ručičkových hodiniek tromi čiarami tak, aby súčet čísel v každej vzniknutej časti bol rovnaký. Talianske slovo „risultanza" z pôvodného zadania však znamená „výsledok" a okrem súčtu sa môže vyskytnúť aj ako označenie rozdielu, súčinu, či podielu. V tomto prípade ste si mohli vybrať, ktorú variantu chcete vyriešiť.

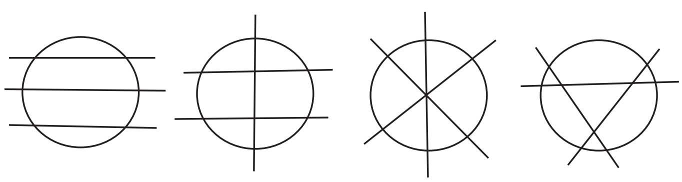
O deliacich čiarach v zadaní nie je veľa popísané, iba to, že majú byť tri. Toto vám tiež dávalo istú voľnosť a bolo na vás, ako sa s tým popasujete. Čiary nemuseli začínať na obvode kruhu, ba dokonca, nemuseli byť ani rovné. Pokiaľ ste nás v postupe presvedčili, že vaše riešenie vyhovuje zadaniu, mohli ste zaň dostať plný počet bodov.

V prípade, že nás zaujíma *súčet* čísel vo vzniknutých častiach, bolo dobré spočítať si súčet všetkých čísel v ciferníku. Je to: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$.

Čísla chceme rozdeliť na viacero skupín, ešte nevieme na koľko, ale vieme, že všetky skupiny majú rovnaký súčet čísel. Pomôže nám výpis všetkých deliteľov čísla 78. Sú to: 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 a 78. To nám vraví, že 78 sa dá rozdeliť na jednu skupinu so súčtom 78, na 2 skupiny so súčtom 39, na 3 skupiny so súčtom 26, na 6 skupín so súčtom 13, na 13 skupín so súčtom 6, atď.

Porozmýšľajme, ktoré z týchto možností pripadajú do úvahy pri delení ciferníku troma čiarami. 1 skupina so súčtom 78 zrejme nedáva zmysel, pretože by sme nič nerozdelili, 13 a viac skupín tiež nie, pretože súčet by bol príliš malý. Skúsme teda deliť na 2, 3 alebo 6 častí.

Pozrime sa teraz na to, akým spôsobom použijeme tri čiary. Najintuitívnejšie je deliť rovnými čiarami, ktoré pretnú obvod kruhu. Tými máme možnosť dostať počet častí od 4 (keď sa čiary nepretínajú) po 7 (keď sa všetky čiary navzájom pretínajú), krajné prípady sú znázornené na obrázku 2 (pri siedmich častiach je však prostredná, siedma, zbytočná, lebo neobsahuje žiadne čísla). Z možných deliteľov 78 prichádza do úvahy len 6 častí so súčtom 13.

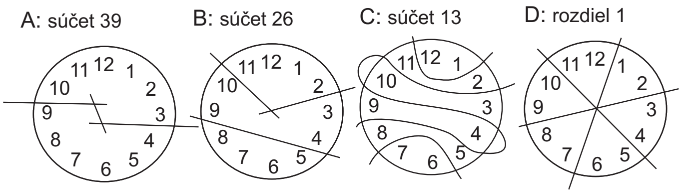


Obrázok 2: Príklady rozdelenia rovnými čiarami na 4, 6 a 7 častí

Vidíme, že delenie na 6 častí nám na kruhu vykrojí akési kruhové výseky a je jasné, že v skupinke spolu môže byť len súvislá postupnosť susediacich čísel. Súčet pritom má byť 13. Ponúkajú sa nám skupinky 12+1 a 6+7, avšak zo žiadnych iných susediacich čísel už súčet 13 nevieme dostať. Preto toto riešenie nie je správne, a pretože iné delitele už nevyhovujú, ani žiadne iné delenie *rovnými* čiarami neexistuje.

Skúsme teda popustiť uzdu fantázii a byť na čiary menej prísni. Ak dovolíme aj nerovné čiary, alebo považujeme za čiaru aj úsečku, ktorá v skutočnosti nedelí kruh, dostávame možnosť deliť aj na 2 alebo na 3 časti.

Pri delení na dve časti so súčtom 39 sa oplatí dať do jednej skupinky najväčšie čísla s najmenšími a ostatné do druhej skupinky. Pri správnom „zakamuflovaní“ troch čiar do jednej nám môže vyjsť riešenie A ako na obrázku 3.



Obrázok 3: Možné rozdelenia tromi čiarami

Podobnou myšlienkou môžeme rozdeliť ciferník aj na tri časti so súčtom 26. Najväčšie čísla (11 a 12) dáme dokopy s najmenšími (1 a 2) do súčtu 26, dve zvyšné najväčšie (10 a 9) s dvomi zvyšnými najmenšími (3 a 4), pričom aj zvyšné čísla (5, 6, 7, 8) dávajú spolu súčet 26. Ak použijeme dve čiary na vytvorenie jednej, môžeme dostať riešenie B na obrázku 3.

Pri delení na 6 častí môžeme zrealizovať pôvodne zamýšľaný plán. Súčet 13 sa podarí dosiahnuť jedine spôsobom 12+1, 11+2, 10+3, 9+4, 8+5, 7+6. Ak čiary dostatočne „pokrivíme“, môžeme dostať riešenie C z obrázka 3.

Ďalšie riešenie, ktoré sme uznávali, je také, kde ste chápali slovo „risultanza“ ako rozdiel. Rozdelenie rovnými čiarami na 6 častí, v ktorých sú susedné čísla ciferníka zabezpečí, že rozdiel väčšieho a menšieho je vždy 1 ($2-1=4-3=6-5=8-7=10-9=12-11$), ako vidno na riešení D na obrázku 3.

Odpoveď: Vzhľadom k tomu, že zadanie povoľovalo rôzne prístupy, riešení, ktoré sme uznávali, bolo viac (najčastejšie z nich sú tie na obrázku 3). Na otázku zo zadania preto odpovieme, že si drozdy mohli mesto rozdeliť aj viacerými spôsobmi.

Komentár: Na vašich riešeniach sme hodnotili hlavne, či ste s vaším prístupom k zadaniu dotiahli príklad do konca. Hlavne v súvislosti s otázkou, či existuje aj viacero rozdelení. Napríklad, ak ste chceli deliť len rovnými úsečkami a našli ste delenie na 3 časti, bolo treba odôvodniť, prečo to na 6 častí nejde (1 bod), ale aj prečo neexistujú iné delenia (1 bod). To sa dalo buď pomocou deliteľov čísla 78, ako vo vzoráku, alebo aj rozobraním všetkých možností, ako sa dá tromi čiarami rozdeliť obvod kruhu. Ďalšie body boli aj za správne prepísanie zadania, súčet čísel 78, ako aj za pekné nakreslenie výsledného riešenia. Všetkých vás chválime za váš originálny prístup. :) A aj nabudúce, keď uvidíte nie veľmi upresnené zadanie, dajte na vašu kreativitu (tej sa medze nekladú :)).