Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2009/2010

Príklad č. 1 (opravovali Danka, Gabika, Jančo):

Zadanie:

Riešenie: Číslo, ktoré hľadáme nebude obsahovať cifru nula, pretože ak by ju obsahovalo, súčin jeho cifier by bol vždy nulový, teda by sa určite nerovnal jeho súčtu. Aby boli všetky jeho cifry menšie ako 5, môže obsahovať iba cifry 1, 2, 3 a 4.

Z týchto cifier si vytvoríme štyri trojice rôznych čísel. Sú to tieto: 1 2 3, 1 2 4, 1 3 4 a 2 3 4. Tieto trojice niesú hocijaké. V každej z trojíc, po vytvorení akéhokoľvek trojciferného čísla, bude ciferný súčet a súčin pre všetky kombinácie tých troch čísel stále rovnaký.

Nakpríklad si vezmeme trojicu 2, 3 a 4. Môžeme z nej vytvoriť tieto trojciferné čísla: 234, 243, 324, 342, 423 a 432. V každom z čísel, ak sčítame jeho cifry, nám vždy vyjde 9. Ak ich vynásobime, tak dostaneme 24. V tomto prípade sa nám ciferný súčet a súčin nerovnajú, a preto nevyhovujú nášmu príkladu.

Teraz spočítame ciferný súčet a súčin aj pre ostatné trojice a zistíme, či sa rovnajú. Pre cifry 1, 2 a 3 je ciferný súčet 6 a súčin tiež 6, čiže táto trojica cifier sa v našom čísle môže nachádzať. Pre cifry 1, 2 a 4 je súčet 7 a súčin 8, takže sa nerovnajú. Pre 1, 3 a 4 je súčet 8 a súčin 12, nerovnajú sa.

Jediná vyhovujúca trojica cifier je 1 2 3. Zostáva nám z nich už len vytvoriť výsledné čísla. Tých je 6 a to: 123, 132, 213, 231, 312 a 321.

Odpoveď: Hľadanými číslami sú 123, 132, 213, 231, 312 a 321.

Komentár: Príklad všetci z vás zvládli a dospeli k správnemu výsledku. Jediný problém bol s postupom, ktorý u niekoľkých z vás chýbal (nabudúce naň nezabudnite!) a preto ste mohli dostať body iba za správny výsledok a to konkrétne 3.

Príklad č. 2 (opravovali Peťo, Dan, Majo):

Zadanie:

Riešenie: Knižnica má tvar štvorca a jej stena je dlhá deväť metrov. Jej rozlohu vypočítame ako súčin jej dvoch stien. Jej rozmery sú:

$$9\,\mathrm{m}\cdot 9\,\mathrm{m} = 81\,\mathrm{m}^2.$$

Teraz si vypočítame rozlohu celého bytu. Zo zadania vieme, že rozloha bytu je deväťkrát väčšia ako rozloha knižnice. Aby sme zistili rozlohu bytu, musíme vynásobiť rozlohu knižnice deviatimi. Rozloha bytu je:

$$81\,\mathrm{m}^2\cdot 9 = 729\,\mathrm{m}^2.$$

Keďže byt je štvorec, všetky jeho steny sú rovnaké a jeho rozlohu vypočítame ako súčin jeho dvoch stien. Môžeme ju vypočítať nasledovne:

$$a\,\mathrm{m}\cdot a\,\mathrm{m} = 729\,\mathrm{m}^2.$$

Teraz potrebujeme nájsť také číslo, ktoré keď vynásobíme samým sebou dostaneme číslo 729. Je to číslo 27. Zistili sme, že stena bytu má dĺžku 27 m. Ďalej si ju vieme rozdeliť na tri časti a to na šírku jednej izby, šírku knižnice a na šírku druhej izby.

Keďže v zadaní nebolo napísané, ktorá izba je spálňa, môžme predpokladať, že všetky izby majú rovnakú šírku aj dĺžku. Dĺžku steny bytu vieme vypočítať ako súčet dvoch šírok izieb a šírky knižnice:

$$b\,\mathrm{m} + b\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} = 27\,\mathrm{m}.$$

Aby sme zistili, aká je šírka izby, musíme od šírky bytu odpočítať šírku knižnice a následne vydeliť dvoma, pretože máme šírku izby započítanú dvakrát. Šírka izby je potom:

$$\frac{27\,\mathrm{m} - 9\,\mathrm{m}}{2} = 9\,\mathrm{m}.$$

Teraz nám už iba zostáva vypočítať dĺžku spálne. Tú vypočítame tak, že od šírky bytu odpočítame šírku izby, pretože šírka bytu je tvorená šírkou izby a dĺžkou izby. Dĺžka izby je:

$$27\,\mathrm{m} - 9\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}.$$

Odpoveď: Rozmery knihovníkovej spálne sú 9 m a 18 m.

Komentár: Príklad nebol ťažký, ale veľa z vás si neprečítalo dobre zadanie a napísali ste nám rozlohu spálne, za čo sme vám žiaľ museli strhnúť body.

Príklad č. 3 (opravovali Tinka, Henry, ViRPo):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania vieme, že abeceda má 25 písmen a štvrté číslo je 8-krát väčšie ako prvé číslo. Táto podmienka nám platí, len keď je prvé číslo 1, 2 alebo 3. Tretie číslo má byť o jedna menšie ako štvrté a súčasne o 13 väčšie ako prvé číslo. To znamená, že štvrté číslo je o 14 väčšie ako prvé.

Teraz si vyskúšame postupne všetky tri možnosti prvého čísla a overíme si, či jeho osemnásobok je o 14 väčší:

- Ak by bolo prvé číslo 1, štvrté by bolo 8, ale neplatilo by, že rozdiel medzi prvým a štvrtým číslom je 14. Túto možnosť môžeme vylúčiť.
- Ak by bolo prvé čislo 2, štvrté by bolo 16. Tu nám platí, že prvé číslo je o 14 menšie ako štvrté.
- Ak by bolo prvé číslo 3, štvrté číslo by bolo 24. Rozdiel medzi prvým a štvrtým číslom by nebol 14, a preto ani túto možnosť neberieme do úvahy.

Teraz už s istotou vieme povedať, že prvé číslo bude 2 a štvrté 16. Podľa podmienok vieme zistiť, aké sú druhé a tretie číslo. Tretie je o 13 väčšie ako prvé: $2 + 13 = 15$. Tretie číslo je 15. Druhé je od tretieho o 3 väčšie: $15 + 3 = 18$. Druhé číslo je 18. Už nám zostáva len vymeniť čísla za písmená. Po tomto dosadení čísel za písmena v abecede zistíme, že názov mesta je BRNO.
Odpoveď: Názov mesta je Brno.
Komentár: Príklad bol celkom ľahučký a mnohí ste ho hravo zvládli. Niektorí z vás ste však príklad nedokončili a prestali ste rátať, keď vám vyšla prvá možnosť a nedokázali ste, že žiadne ďaľšie riešenie neexistuje. Druhá častá chyba bola, keď ste povedali, že možnosť neplatí, pretože mesto s takým názvom neexistuje. Za tieto nedosttaky sa strhávalo pár bodov. Inak ste to zvládli veľmi pekne a potešili ste nás vašimi riešeniami :-)

Príklad č. 4 (opravovali Uľa, Marka, Mária):
Zadanie:
Riešenie:
Najskôr si musíme uvedomiť, že počet lístkov je vlastne počet dvojíc zastávok. To znamená, že keď sa muselo vytvoriť 52 nových sád lístkov, muselo vzniknúť aj 52 nových dvojíc zastávok. Ďalej si musíme uvedomiť, že zo zastávky A na zastávku B potrebujeme jeden lístok a zo zastávky B na zastávku A potrebujeme iný, druhý lístok. Z tohto vieme, že počet dvojíc zastávok je polovica z počtu lístkov, pretože dvojica zastávok AB je taká istá ako dvojica BA, ale lístky sú už rôzne. Pribudne nám 26 nových dvojíc zastávok. Tieto dvojice si môžeme rozdeliť na dvojice medzi novými zástavkami a na dvojice nových so starými. Počet dvojíc nových zastávok so starými si vieme vypočítať ako ich súčin, pretože každá nová zastávka vytvorí dvojicu s každou starou zastávkou. Počet dvojíc medzi novými zastávkami si vieme vypočítať ako súčet čísel od n po jedna. n je počet zastávok mínus jedna. Je to ako s podávaním rúk. Prvý si podá ruku so všetkými okrem seba, druhý so všetkými okrem seba a prvého, lebo s ním si už podal atď. až predposledný si podá ruku už iba s posledným a posledný si už nepodá s nikým iným, pretože si už podal ruku s každým. Teraz ideme postupne skúšať dosádzať za počet nových zastávok čísla od jednotky a pre každé si vypočítame počet dvojíc medzi nimi, koľko musí byť dvojíc nových so starými, aby ich bolo spolu 26 a koľko je potom starých zastávok. Počet starých zastávok vypočítame tak, že vydelím počet dvojíc nových so starými počtom nových zastávok.

nové zastávky	počet dvojíc nových	počet dvojíc nových so starými	staré zastávky
1		26	26
2	1	25	12,5
3	3	23	7,7
4	6	20	5
5	10	16	3,2
6	15	11	1,8
7	21	5	0,7

Ďalej už nemusíme skúšať, pretože už pri siedmich zastávkach vychádza počet starých menších ako jedna, čo nemôže byť. Zistili sme, že len pri jednej a štyroch nových zastávkach, je aj počet starých zastávok celé číslo.
Odpoveď: Výsledok je, že bolo 26 zastávok a pridali 1 zastávku, alebo bolo 5 zastávok a pridali 4 zastávky.
Komentár: Skoro všetci ste prišli na to, ako vypočítať počet všetkých cestovných lístkov, aj keď nie všetci ste tam napísali, odkiaľ ste na to prišli. Viacerí z vás to riešili formou tabuľky, kde ste si zapisovali počet zastávok, počet lístkov a rozdiel v počte, ktorý mal byť 52. Samozrejme aj toto je dobrý spôsob avšak viacerí z vás sa uspokojili, keď našli jedno riešenie, alebo ste nenapísali prečo nebol dôvod, aby ste ešte ďalej skúšali.

Príklad č. 5 (opravovali Natali, Dada):
Zadanie:
Riešenie: Zadanie nám hovorí, že každé dve po sebe idúce cifry tvoria dvojciferný násobok čísla 17 *alebo* 23. Začneme tým, že si všetky tieto dvojciferné násobky vypíšeme.

Dvojciferné násobky sedemnástich sú 17, 34, 51, 68 a 85.

Dvojciferné násobky čísla 23 sú 23, 46, 69 a 92.

Vieme, že prvá cifra nášho čísla je 6. Sú dva násobky začínajúce na 6, 68 a 69, takže druhá cifra je buď 8 alebo 9. Pozrieme sa na obivda prípady:

Prvá možnosť: Ak po 6 nasleduje 8. Tretia cifra v poradí môže byť iba číslo 5, lebo jediný násobok začínajúci na 8 je 85. Štvrtá môže byť jedine číslo 1, pretože jediný násbok začínajúci na 5 je 51. Po jednotke môže nasledovať jedine 7. Nemáme žiaden násobok začínajúci na 7, takže po číslach 68517 už nemôže nasledovať žiadne ďaľšie. Túto kombináciu môžme teda použiť jedine na úplnom konci nášho 2009-ciferného čísla, keď už nevadí, že nebude možné pokračovať ďaľej.

Druhá možnosť: Ak po 6 nasleduje cifra 9. Teraz hľadáme násobky začínajúce na 9. Jediný je 92, takže tretia cifra bude 2. Ďalej hľadáme násobok začínajúci na 2 a tým je 23, násobok začínajúci na 3 je jedine 34 a násobok začínajúci na 4 je 46. Vidíme, že po cifrách 69234 sa znovu objavuje 6. To znamená že sme našli akýsi cyklus piatich cifier, ktorý sa môže opakovať stále dookola.

V prvých 2005. cifrách po žiadnej cifre 6 nemôže nasledovať 8, lebo ako sme už spomínali, po 8 by mohli nasledovať ešte 5 1 7 a ďaľej už nič. Takže môžme povedať, že prvých 2005 cifier sa bude stále opakovať kombinácia piatich cifier 6 9 2 3 4.

2005-ta cifra je teda 4, 2006-ta musí byť 6. Teraz nám už nevadí, ak by sme nemohli pokračovať ďaľej, takže na posledné štyri cifry máme dve možnosti: 6 9 2 3, alebo 6 8 5 1. Vidíme, že poslednou cifrou môže byť buď 3 alebo 1 a architekt si nemôže byť istý koľko okien má spraviť.
Odpoveď: Poslednou cifrou môže byť buď 3 alebo 1, architekt si nemôže byť istý koľko okien má spraviť.
Komentár: Prvou, veľmi dôležitou vecou bolo uvedomiť si, že dvojčíslie má byť deliteľné buď sedemnástimi, alebo dvadsiatimi tromi, a nie oboma zároveň. Nájsť násobky týchto čísel a zistiť, ktoré cifry môžu nasledovať po ktorých ste už zvládli takmer všetci, ako aj vysvetlenie, prečo po cifrách 68517 nemôžu nasledovať žiadne ďalšie. Veľa z vás však urobilo chybu, že túto kombináciu automaticky zavrhlo a neuvedomilo si, že na konci čísla to neprekáža, a tým pádom ste stratili jednu z dvoch možností. Celkovo ste však príklad zvládli veľmi dobre, za čo vás chceme pochváliť :)

Príklad č. 6 (opravovali Monča, Andy):

Zadanie:
Riešenie: Ako pomôcku pri riešení tohto príkladu si môžeme vytvoriť tabuľku, do ktorej budeme postupne vpisovať údaje, ktoré potrebujeme zistiť. Sú to mená poľovníkov, mestá z ktorých pochádzajú, počet zvierat ktoré ulovili, zbraň ktorou lovili a ich povolanie. Stĺpce nám budú znázorňovať miesta pri stole.

Vďaka tretej vete si do tabuľky môžeme zapísať bankára, sediaceho na ľavom kraji stola a tiež Freda, lebo vieme, že sedí vedľa neho. Podľa druhej vety vieme, že vedľa bankára sedí elektrikár, ktorý použil striebornú pušku. Tieto informácie priradíme Fredovi, pretože on obsadil jediné miesto vedľa bankára. O mieste v strede máme v zadaní hneď tri informácie. Sedí tu Dick, je z Tusconu a použil guľovnicu. Štvrtá veta hovorí, že úplne napravo sedí predavač a ten ulovil jediné zviera. Aj to môžeme vpísať do tabuľky. Teraz už vieme zapísať aj údaje zo šiestej vety, a to, že muž z New Yorku, ktorý použil M800, sedí vedľa muža, ktorý ulovil jedno zviera. Vedľa tohto muža má podľa zadania sedieť taký, ktorý ulovil 10 zvierat a je profesorom. To môže byť iba Dick, pretože o mužovi úplne vpravo už vieme počet zvierat ktoré ulovil. Postupne všetko vpisujeme do tabuľky. V prvej vete je spomenutý klampiar Henry. My už máme v tabuľke zapísané štyri povolania a preto pre Henryho zostáva jediné miesto medzi profesorom a predavačom. Vieme o ňom aj to, že ulovil o jedno zviera menej ako Dick, čo znamená: $10 - 1 = 9$. Bankár ulovil šesť zvierat a preto počet zvierat nevieme už iba v prípade elektrikára. V zadaní sa spomína muž, ktorý je z Orlanda a ulovil 15 zvierat, takže teraz už vieme, že je to elektrikár. Ešte nepoznáme dve mená chlapov. Vďaka dvanástej vete vieme, že Joe nesedí vedľa Henryho. Takéto miesto je voľné už iba jedno, preto Joe bude sedieť úplne naľavo. Posledný je Malcolm, o ktorom vieme, že použil brokovnicu. Posadíme ho úplne napravo, na jediné voľné miesto, kde ešte nemáme určené meno. Zo siedmej vety ďalej vieme nejaké údaje o Joe-ovi. Je z Los Angeles a použil Zastavu M70. Nakoniec ešte dosadíme St. Louis na posledné voľné miesto, a to k Malcolmovi.
Odpoveď: Pozri tabuľku 1

meno	Joe	Fred	Dick	Henry	Malcolm
mesto	Los Angeles	Orlando	Tuscon	New York	St. Louis
počet ulovených zvierat	6	15	10	9	1
zbraň	Zastava M70	strieborná puška	guľovnica	M800	brokovnica
povolanie	bankár	elektrikár	profesor	klampiar	predavač

Tabuľka 1: riešenie príkladu 6

Komentár: Príklad bol vzhľadom na to, že veľa z Vás dostalo 10 bodov, pomerne jednoduchý. Objavili ste sa však aj takí, ktorí nakreslili len tabuľku a žiaden postup nám nenapísali, za čo sme Vám museli strhnúť dosť veľa bodov.

Príklad č. 7 (opravovala Betka):

Zadanie:
Riešenie: Pre zjednodušenie vysvetlovania si označíme niektoré neznáme uhly gréckymi písmenami: $\sphericalangle SBC = \alpha$, $\sphericalangle SAD = \beta$, $\sphericalangle ASD = \gamma$, $\sphericalangle BSC = \delta$ a uhol, ktorý hľadáme $\sphericalangle AXB = \omega$. Veľkosť úsečiek $|AS| = |BS| = |CS| = |DS| = r$, čo je polomer kružnice. Z tohto vieme, že trojuholníky ASB, BSC, CSD a ASD sú všetky rovnoramenné.

Súčet uhlov v každom trojuholníku je $180°$. V rovnoramenných platí, že uhly pri základni sú rovnako veľké. Keďže poznáme veľkosti uhlov $|\sphericalangle ASB| = 120°$ a $|\sphericalangle CSD| = 50°$, vieme vypočítať uhly $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SAB|$ a $|\sphericalangle SCD| = |\sphericalangle SDC|$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |\sphericalangle SBA| + |\sphericalangle ASB| &= 180° \\ 2 \cdot |\sphericalangle SBA| + 120° &= 180° \\ 2 \cdot |\sphericalangle SBA| &= 60° \\ |\sphericalangle SBA| &= 30° \end{aligned}$$

Rovnakým postupom vyrátame aj uhol $|\sphericalangle SCD| = 65°$. Taktiež platí, že kruh má $360°$:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle ASB| + \delta + \gamma &= 360° \\ 50° + 120° + \delta + \gamma &= 360° \\ \delta + \gamma &= 190° \end{aligned}$$

Vezmeme si teraz súčet uhlov v trojuholníkoch BCS a DSA:

$$2 \cdot \alpha + \delta + 2\beta + \gamma = 360^\circ$$

Do rovnice dosadíme $\delta + \gamma = 190^\circ$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \alpha + 2\beta + 190^\circ &= 360^\circ \\ \alpha + \beta &= 85^\circ \end{aligned}$$

Chceme zistiť veľkosť uhla ω. K tomu nám pomôže trojuholník ABX:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle XBA| + |\sphericalangle XAB| + \omega &= 180^\circ \\ |\sphericalangle XBA| &= |\sphericalangle SBA| + \alpha \\ |\sphericalangle XAB| &= |\sphericalangle SAB| + \beta \\ |\sphericalangle SBA| + \alpha + |\sphericalangle SAB| + \beta + \omega &= 180^\circ \end{aligned}$$

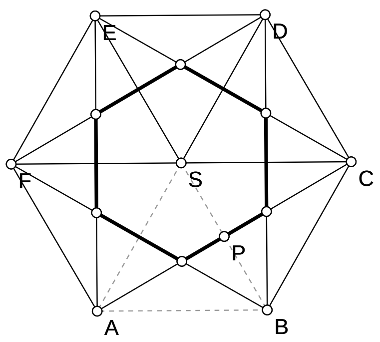
Dosadíme $|\sphericalangle SBA|$, $\alpha + \beta$, $|\sphericalangle SAB|$ a vyrátame uhol ω:

$$\begin{aligned} 30^\circ + 30^\circ + 85^\circ + \omega &= 180^\circ \\ \omega &= 35^\circ \end{aligned}$$

Odpoveď: Do kasičky je potrebné vhodiť 35 grošov.
Komentár: Príklad nebol najťaží, no ľahko sa v ňom dalo pomýliť. Často ste sa dopracovali k správnemu riešeniu, ale nesprávnym postupom. Väčšina chýb nastala, keď ste sa pokúšali konkrétne určiť veľkosti uhlov $\alpha, \beta, \gamma a \delta$. Oni sa ale určiť bez ďalšej informácie v zadaní nedali. Jediné k čomu ste mohli dospieť boli rovnosti, ktoré tieto uhly určite museli spĺňať, no inak to mohli byť akékoľvek nenulové uhly spĺňajúce tieto súčty: $\alpha + \beta = 85^\circ$ a $\delta + \gamma = 190^\circ$.

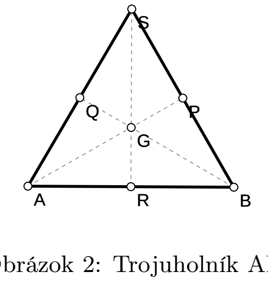
Príklad č. 8 (opravovali Palo, Juro):

Zadanie:
Riešenie: Pôdorys stanu so všetkými spojnicami vrcholov si nakreslime na obrázok 1.



Obrázok 1: Pôdorys stanu

Na ňom sa zamerajme na útvar označený $ABCS$. Určite vieme, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé - pôvodný veľký šesťuholník bol pravidelný, a všetky z trojuholníkov ABS, BCS, ... sú rovnostranné. Takisto vďaka rovnostranným trojuholníkom vieme, že $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle BCS| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle CSA| = |\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Z týchto podmienok je jasné, že útvar $ABCS$ je kosoštvorec. O kosoštvorci vieme, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé a rozpoľujú sa, čiže úsečka AP musí byť výškou (a zároveň ťažnicou) trojuholníka ABS. Nakreslime si tento trojuholník ešte raz na obrázok 2.



Obrázok 2: Trojuholník ABS

Ako vidíme na obr. 2, keď si rozdelíme rovnostranný trojuholník ťažnicami na 6 častí, práve dve z nich budú v aj v malom šesťuholníku z obr. 1. Ťažnice rozdeľujú ľubovoľný trojuholník na 6 obsahovo (a rovnostranný aj tvarovo) rovnakých častí. To znamená, že z každého trojuholníka ABS, BCS,... je v malom šesťuholníku práve tretina plochy (pretože $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$). A teda obsah malého šesťuholníka je práve $\frac{144\,\mathrm{m}^2}{3} = 48\,\mathrm{m}^2$, čo je teda slušne veľký dvojizbový byt.
Odpoveď: Podlaha stanu bude mať obsah $48\,\mathrm{m}^2$.
Komentár: Väčšina z vás príklad zvládla na výbornú, chyby boli len veľmi individuálne. Len tak ďalej aj v ďalších sériách :)

Príklad č. 9 (opravovali Kozzy, Murko, Phil):

Zadanie:
Riešenie: Vieme že súčet čísel všetkých domov, ktoré počas týždňa poštár navštívil, je $18 + 12 + 23 + 19 + 32 + 25 = 129$

Keďže poštár donesie poštu do každého z domov práve trikrát, súčet čísel domov, kam doručoval poštu, je $\frac{129}{3} = 43$.

Súčet čísel všetkých domov od 1 do 10 je 55. Keďže doručil poštu do domov so súčtom čísel 43 a súčet domov na ulici (okrem 11 a 12) je 55, poštu nedoručoval do domov so súčtom 12.

Do domu s číslom 1 poštu doručoval, lebo so žiadnym číslom od 1 do 10 nedáva súčet 12. Rovnako 6 dáva súčet 12 len sama so sebou, ale na ulici nemohli byť dva domy s rovnakým číslom. So zvyšných čísel vieme súčet 12 vytvoriť nasledujúcimi dvojicami:

2 a 10, 3 a 9, 4 a 8, 5 a 7.

Vieme, že do jednej s týchto dvojíc domov poštár nechodí.

Vráťme sa k súčtom v jednotlivých dňoch. Každý deň bola pošta doručená do 4 domov. Pozrime sa na piatok. Súčet domov, v ktorých bol poštár v piatok, je 32, čo je číslo dosť vysoké. Keď sčítame štyri najväčšie čísla domov na ulici $10 + 9 + 8 + 7$, dostávame súčet 34. Keby poštár v piatok nebol v dome číslo 10, najväčší súčet, ktorý môže dosiahnuť, je 30 $(9 + 8 + 7 + 6)$, rovnako keby nebol v dome číslo 9, najväčší súčet, ktorý môže dosiahnuť, je 31 $(10 + 8 + 7 + 6)$. Teda v piatok poštár navštívil domy 9, 10 a ešte dva domy, ktorých súčet čísel je 13 $(32 - (10 + 9))$.

Tým sme zistili, že do domov číslo 9 a 10 musí chodiť a môžeme vylúčiť dvojice 2 a 10, 3 a 9, kedže vieme, že do domov 9 a 10 poštár chodí v piatok.

V tejto chvíli pripadajú do úvahy už len dve dvojice domov, ktoré nenavštevuje a to 4 a 8, 5 a 7, ostatné dve sme vylúčili na základe toho, že poštár navštívil v piatok domy s číslami 9 a 10.

Vráťme sa ale k piatku. Chceme nájsť dve čísla, ktorých súčet čísel je 13 a zároveň ani jedno z nich nesmie byť 9 ani 10, pretože tieto domy už poštár v piatok určite navštívi. Podmienkam vyhovujú iba dvojice domov 8 a 5, alebo 7 a 6.

Poštár však v piatok nemôže zájsť do domov 8 a 5, lebo by navštívil dom z každej dvojice, ktorá môže byť poštárom nenavštevovaná (4,8;5,7). Ak však doručí poštu do domov 7 a 6, zistíme, že dvojica domov 4 a 8 bude práve tá, ktorá nedostáva poštu.
Odpoveď: Poštár nedoručuje poštu do domov s číslami 4, 8, 11 a 12.
Komentár: Väčšina z vás dosiahla 10 bodov, takže príklad môžeme považovať za zvládnutý. Tí čo nedosiahli plný počet bodov, riešili príklad rôznymi spôsobmi, takže písať o strhávaní bodov za nejakú konkrétnu chybu nemá zmysel.

Prémia (opravovali Emil, Domča, Ema):

Zadanie:
Doplnené zadanie: Lúka tvaru obdĺžnika je rozdelená na 12 štvorcových parciel, ktoré tvoria štvorcovú sieť, ktorá má 3 riadky a 4 stĺpce. Na každej parcele stoji jeden dom. Dva domy susedia, ak majú ich parcely spoločnú stranu. Domy treba očíslovať číslami od 1 do 12 tak, aby boli dodržané nasledujúce podmienky:

1. Všetci susedia domu 6 maju čísla menšie ako 6.
2. Každý dom, ktorý susedí s domom 4, má číslo deliteľné 4.
3. Dom 1 susedí so všetkými domami, ktorých čísla sú nepárne prvočísla.
4. Dom 9 nie je v rohu a jeho susedia majú súčet 28.
5. Súčet čísel troch domov v niektorom „stĺpci“ je menší ako 13.
6. Súčet čísel domov v žiadnom „stĺpci“ nepresahuje 27.

Nájdite aspoň jedno riešenie.
Riešenie: Pre ľahšie vysvetľovanie si najprv lúku s parcelami označíme od $a1$ po $d3$, tak ako je to na obrázku 3.

a1	b1	c1	d1
a2	b2	c2	d2
a3	b3	c3	d3

Obrázok 3: označenie parciel

Všimneme si podmienku č.2, podľa ktorej dom 4 môže susediť len s domami s číslom, Všimneme si podmienku č.2, podľa ktorej dom 4 môže susedieť len s domami s číslom, ktoré je deliteľné 4. Túto podmienku z čísel od 1 do 12 spĺňajú len čísla 4, 8 a 12. Keďže však len jeden dom má číslo 4, tak vedľa tohoto môžu stáť len domy 8 a 12. Preto musí byť v rohu lúky (iba tak môže susediť len s dvoma domami). Lúka je súmerná a žiadne podmienky nehovoria konkrétne o umiestnení žiadnych čísiel[1]. Preto je jedno, v ktorom rohu to bude a tak ho umiestnime na parcelu $a1$.

Podľa podmienky č.3 dom 1 susedí so všetkými domami, ktorých čísla sú nepárne prvočísla, teda 3,5,7 a 11 (keďže musia byť od 1 do 12). Z toho vyplýva, že dom 1 môže stáť len na parcelách, ktoré majú vedľa seba 4 ďalšie parcely, teda na jednej zo stredných parciel ($b2, c2$). Navyše keďže vedľa domu 4 sú domy 12 a 8, musí to byť stredové políčko vzdialenejšie od domu 4, teda $c2$.

Podľa podmienky č.4 dom 9 nie je v rohu. Navyše nemôže susediť s domami 1 a 4, tak zostáva jediná parcela, na ktorej môže ležať a to $b3$. Okolo neho sú tri domy ($a3, b2, c3$), ktorých čísla majú mať súčet 28. Dve z toho sú určite nepárne prvočísla ($b2, c3$-susedia domu 1). Tretie z nich môže byť najviac 10, lebo dom 12 už susedí s domom 4 a dom 11 s domom 1. To znamená, že súčet prvých dvoch musí byť aspoň 18. Keďže najväčšie dve nepárne prvočísla do 12 sú 7 a 11 a ich súčet je 18, tak práve domy 7 a 11 susediť s domom 9. Tretím susedom domu 9 je v tom prípade dom 10, ktorý je ďalším, ktorého polohu už poznáme ($a3$).

Ďalej sa pozrieme na podmienku č.6. Podľa nej súčet čísel domov v žiadnom „stĺpci“ nepresahuje 27. V „druhom stĺpci“ zatiaľ poznáme presne iba polohu domu 9 ($b3$). Nad ním ($b2$) musí byť jeden z domov 7 a 11 (susedia domov 1 a 9) a ešte nad ním ($b1$) jeden z domov 8 a 12 (susedia domu 4). Ak by na parcele $b2$ bol dom 11, tak súčet 27 by bol prekročený určite (či už by na parcele $b1$ bol dom 8 alebo 12). Preto tam ($b2$) musí byť dom 7 a dom 11 musí stáť napravo od domu 9, teda na $c3$. Ak by bol na parcele $b1$ dom 12, bol by súčet daného stĺpca až 28 a preto na $b1$ musí byť dom 8. Pre dom 12 ostáva parcela $a2$.

Prvá podmienka nám vraví, že všetci susedia domu 6 musia mať menšie číslo ako 6. Ak si navyše spomenieme, že vedľa domu 1 sú iba nepárne prvočísla, tak nám zostane jediná možnosť, kde tento dom môže stáť ($d1$). Ostali nám 3 neumiestnené domy: 2, 3 a 5. Nakoľko domy 3 a 5 musia susediť s domom 1, pre dom 2 nám ostala iba jediná parcela, kde by mohol stáť a tu je $d3$.

Nakoniec piata podmienka nám hovorí, že súčet čísel troch domov v niektorom „stĺpci“ je menší ako 13. To neplatí pre stĺpce a, b a ani stĺpec c to už nemôže splniť (súčet čísel jeho dvoch známych domov je 12). Preto to musí splniť stĺpec d. Tam sú zatiaľ domy 2 a 6 a musí tam byť ešte jeden z domov 3 a 5. Ak by tam bol dom 5, ich súčet by bol 13, čo sa nezhoduje s podmienkou a preto na ($d2$) musí stáť dom 3. A nakoniec, dom 5 bude na poslednej voľnej parcele a tou je $c1$.

Odpoveď: Domy sú očíslované tak, ako na obrázku 4.

4	8	5	6
12	7	1	3
10	9	11	2

Obrázok 4: usporiadanie domov na lúke

Komentár: Viacerí z vás nám poslali veľmi pekné riešenia, za ktoré dostali plných 6 bodov, ale dosť bolo aj tých, ktorý nevysvetlili po každom svojom tvrdení, ako naň prišli. V takýchto prípadoch sme podľa množstva a závažnosti týchto nedostatkov strhávali 1 až 3 body. Našli sa aj takí, čo poslali iba výsledok. Aj keď bolo vašou úlohou nájsť iba jedno riešenie, chceli sme od vás aj postup, akým ste ho hľadali. Preto sme vám len za vyriešený príklad nemohli dať viac ako 2 bodíky.

[1]Také pravidlo by napríklad mohlo byť, že „Šestka je v najľavejšom stĺpci.“