Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2009/2010

Príklad č. 1 (opravoval Maják):

Zadanie:

Riešenie: Naša úloha sa dá zapísať v tvare $(a \times x) + y = z$, pričom za x, y a z máme dosadiť čísla $5, 8$ a 23. Pôvodné číslo, ktoré je kladné, najprv vynásobíme a potom k nemu ešte pripočítavame, a preto výsledok z musí byť väčší aj ako x aj ako y. Teda $z = 23$. Pre x a y nám ostali už len dve možnosti.

Prvá, skúsime $x = 5$ a $y = 8$. V tom prípade $(a \times 5) + 8 = 23$, a vyjde nám $a = 3$.

Druhá možnosť je tá, že $x = 8$ a $y = 5$. Potom naša úloha bude mať tvar $(a \times 8) + 5 = 23$. Z nej vyjde, že a by sa malo rovnať 18/8, čo ale nie je celé čislo, a preto z tejto možnosti žiadne riešenie nemáme.

Žiadne ďalšie možnosti pre x a y už nie sú.

Odpoveď: Matilda si myslela číslo 3.

Komentár: Príklad sa podaril všetkým úspešne vyrátať. Jediné nedostatky sa objavili v tom, že niektorí z vás po prvom nájdenom riešení prestali hľadať dalšie. Nás vždy zaujímajú všetky riešenia príkladu. Aj keď je len jedno, tak treba ukázať, že žiadne ďalšie už nie sú.

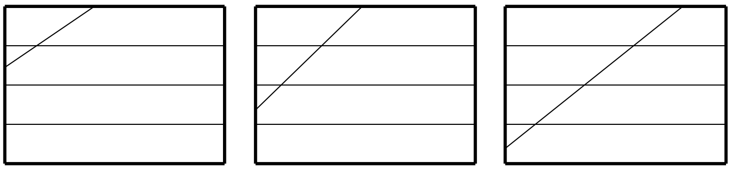
Príklad č. 2 (opravovali Uľa, Juro, Majo):

Zadanie:

Riešenie: Predstavme si celé poschodie ako jeden veľký obdĺžnik. Nové oblasti budú vznikať pretínaním priamok. Najmenší počet častí vytvoríme, keď sa žiadne dve nepretnú, teda budú rovnobežné. Takto dostávame 5 častí (Obrázok 1)

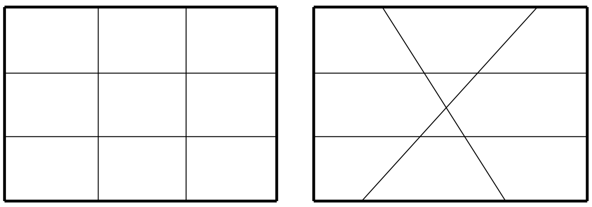
Obrázok 1: 5 častí

Skúsime jednu z priamok zobrať a klásť ju postupne tak, aby sa pretínala s jednou, dvomi a nakoniec všetkými tromi priamkami. Takýmto postupom dostávame poschodie rozdelené na 6, 7 a 8 častí (Obrázok 2).



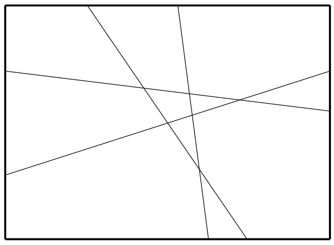
Obrázok 2: 6, 7 a 8 častí

Teraz zoberieme ďalšiu z rovnobežiek, a budeme chcieť rozdeliť poschodie na 9 častí. Na to nám stačí uložiť priamky tak, aby dve a dve boli rovnobežné (ako pri piškvorkách 3x3). 10 častí vieme získať tak, že dve odobraté priamky sa navzájom prekrížia a miesto ich stretnutia nebude ležať na inej priamke (Obrázok 3).



Obrázok 3: 9 a 10 častí

Ak chceme vytvoriť 11 častí, musíme všetky priamky položiť tak, aby sa všetky navzájom pretínali, a to každá dvojica v inom bode (Obrázok 4).



Obrázok 4: 11 častí

Vieme vytvoriť aj 12 častí? Určite nie, lebo nové oblasti vznikajú iba pretínaním priamok a my sme už vytvorili maximálny počet prienikov.
Odpoveď: Priamkami vieme rozdeliť poschodie na 5 až 11 častí. (Ak by sme uvažovali o celej rovine bez ohraničenia, tak je možností 5).
Komentár: Boli sme trochu sklamaní z malého počtu poslaných riešení, lebo tento príklad bol veľmi ľahký. Ale zato riešenia boli veľmi pestré. Uznávali sme aj riešenie, v ktorom sa bralo ako poschodie do úvahy celá rovina, lebo to odstránilo pár možností.

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Jančo):

Zadanie:
Riešenie: (a) Matilda vyhrá preto, lebo Sofia môže dať svoju iniciálu iba do jednej z dvoch škatúľ. Je jedno do ktorej z nich dá Sofia svoju iniciálu, lebo do druhej(zostávajúcej) dá Matilda svoju, a tak vyhrá.

(b) Označíme si prázdne škatule zľava doprava postupne a, b, c ako na obrázku 5. Ak by Matilda dala svoju iniciálu do škatule a, tak by Sofia mohla ukončiť hru, keby dala do oboch škatúľ b a c naraz. Ak dá Matilda svoju iniciálu do škatule b alebo c, tak Sofia ju bude môcť dať iba do jednej z dvoch zvyšných škatúľ a do poslednej škatule ju dá určite Matilda. Posledným ťahom, ktorý môže Matilda urobiť, je dať svoje iniciály do škatúľ b aj c. Potom by ale Sofia svojím ťahom zaplnila poslednú voľnú škatuľu (a) a teda by vyhrala. Áno, existujú ťahy ktoré by zaručili Matilde výhru. Sú dva a môžete ich vidieť na obrázku 6.

S	a	M	b	c

Obrázok 5: Označenie voľných políčok (b)

S		M	M	
S		M		M

Obrázok 6: Ťahy, ktoré zaručia Matilde výhru (b)

(c) Označíme si prázdne škatule zľava doprava postupne a, b, c, d ako na obrázku 7. Ak by dala Sofia jej iniciálu do a, tak by Matilda mohla dať svoju do c. Potom by Sofia mohla dať iba do jedej z dvoch škatúľ b a d, a do poslednej by tak dala svoju iniciálu Matilda. Ak by dala Sofia jej iniciálu do b, tak by Matilda dala do c alebo d. Sofia by potom mohla dať iba do jednej z dvoch zvyšných škatúľ a do poslednej by dala svoju iniciálu opäť Matilda. Podobne by to bolo, aj ak by dala Sofia svoju iniciálu do c alebo d, vždy by mohla vyhrať Matilda. Ak by dala Sofia jej iniciálu do b a c, alebo do c a d, tak by Matilda mohla dať iba do jednej z dvoch voľných škatúľ, a tak by do poslednej škatule dala svoju iniciálu Sofia. Áno, existujú ťahy, ktoré by zaručili Sofii výhru. Sú dva a môžete ich vidieť na obrázku 8.

a	M	b	c	d

Obrázok 7: Označenie voľných políčok (c)

	M	S	S	
	M		S	S

Obrázok 8: Ťahy, ktoré zaručia Sofii výhru (c)

Odpoveď: (a)Matilda vždy vyhrá, ak vloží svoju iniciálu do strednej škatule.
(b)Áno, existujú ťahy ktoré by zaručili Matilde výhru. Sú dva a môžete ich vidieť na obrázku 6.
(c)Áno, existujú ťahy ktoré by zaručili Sofii výhru. Sú dva a môžete ich vidieť na obrázku 8.
Komentár: Veľa z vás malo pekné riešenie. Strhávali sme vám body za to, ak ste mali nevysvetlené, že sú iba tieto riešenia, alebo za to, že ste mali niektoré zlé riešenia. Bohužiaľ, našli sa aj takí, čo nepochopili dobre zadanie a mali celý príklad zle.

Príklad č. 4 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Hľadáme čo najmenšie číslo, ktorého niektoré 4 po sebe idúce číslice sú 2, 0, 0, 3 a tiež je deliteľné každou nenulovou cifrou ktorú obsahuje. To znamená, že toto číslo bude určite deliteľné 3 (jeho ciferný súčet musí byť deliteľný 3) a zároveň bude deliteľné aj 2 (párne, musí sa končiť jednou z cifier 0, 2, 4, 6, 8). Z týchto podmienok potom vidíme, že za 2003 musíme doplniť minimálne jednu cifru, aby bolo číslo deliteľné dvomi. Tým sme vylúčili 4 a menej ciferné čísla.

Začneme 5-cifernými číslami. Tie musia byť v tvare 2003$*$. Za $*$ môžeme doplniť 0, 2, 4, 6, 8. Avšak iba možnosť 20034, je deliteľná aj 3. Toto číslo však nie je deliteľné 4. Týmto sme vylúčili 5-ciferné čísla.

Pokračujme 6-cifernými. Teraz dopĺňame 2 cifry. Máme 2 možnosti ako ich umiestniť, buď 2003$**$ alebo $*$2003$*$. Ciferný súčet je zatiaľ 5, takže ciferný súčet hviezdičiek môže byť 1, 4, 7, 10, 13, 16 aby bolo vzniknuté číslo deliteľné tromi. Keďže hľadáme najmenšie číslo, potrebujeme čo najmenšie cifry. Vezmeme teda 1 (1+0). Posledná cifra musí byť 0 (aby bolo číslo deliteľné 2). Toto číslo bude určite vyhovovať, lebo bude určite deliteľné 1, a zároveň 2 aj 3. Zostanú 2 možnosti, 200310 alebo 120030, z ktorých jasne vidíme, že 120030 je menšia. Všetky ďalšie možnosti by už boli väčšie.

Odpoveď: Východné číslo je 120030.

Komentár: Príklad bol celkom ľahký a väčšina mala dobrý výsledok. Body ste stratili, keď ste nevysvetlili, ako ste vylúčili možnosti alebo ak ste nejaké ani nespomenuli.

Príklad č. 5 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Chceme zistiť, ktorý z troch tvorov je skutočný človek, a ktoré dva sú iba klony. Od každého z nich poznáme 3 výroky. Minimálne jeden je z nich pravdivý a minimálne jeden nepravdivý.

Vidíme, že v dvoch výrokoch sa spomína laboratórium pre klonovanie. Tu vznikli rôzne vysvetlenia. Ak je tvor klonom, tak v laboratóriu vznikol a teda v ňom určite už bol. Otázka je či tam bol aj skutočný človek. Môžeme si povedať, že klony vznikli z tohto originálu, a preto tam aj on bezpodmienečne musel byť. Alebo si povieme, že to je hocijaký bežný človek, ktorého sme neklonovali. Pozor, to neznamená, že do laboratória nemohol niekedy prísť na exkurziu (za toto krásne pomenovanie ďakujem jednej riešiteľke).

Prejdime priamo k riešeniu. Tvor v čiernom tričku má zaujímavé odpovede. Jeho druhá veta:„Všetko, čo hovorí ten v bielom tričku, je klamstvo." je určite lož, lebo každý tvor aspoň raz hovorí pravdu. Jeho zvyšné dva výroky:„Ten v červenom tričku je skutočný." a „Ja nie som klon." si navzájom protirečia. Aby červený vravel aspoň raz pravdu, tak jeden z týchto výrokov je pravdivý (automaticky druhý je klamstvo). To znamená, že buď tvor v čiernom tričku alebo tvor v červenom tričku je skutočný. Tvor v bielom tričku teda musí byť klon.

Poďme si rozobrať odpovede bieleho. „Som skutočný" je klamstvo, „Nikdy som nebol v laboratóriach pre klonovanie" je tiež klamstvo vzhľadom na to, že tam vznikol. Jeho tretí výrok preto musí byť pravdivý:„Ten v čiernom tričku je klon". Rozobratím týchto odpovedí nám jednoznačne vyšlo, že tvor v čiernom tričku je klon.

Poznáme už dva klony: v bielom a čiernom tričku. Tretí tvor by mal byť skutočným človekom. Nezabudnite, že toto nie je koniec príkladu. Musíme najprv overiť, či pre takéto rozdelenie hovorí každý tvor aspoň 1 pravdu a aspoň 1 klamstvo, a teda či úloha má vôbec nejaké riešenie.

Odpovede bieleho sme rozobrali, všetko sedí. Pri čiernom: výrok, ktorý tvrdí, že on nie je klon je nepravdivý, a naopak, výrok, v ktorom vraví, že červený je skutočný, je pravdivý. Tiež to vychádza. Pozrime na odpovede tvora v červenom. „Ja nie som klon" je pravdivé, lebo je skutočný. „Ten v bielom tričku hovorí pravdu, ak tvrdí, že nikdy nebol v laboratóriach pre klonovanie" - toto je klamstvo, lebo biely v laboratóriu určite bol. To máme jednu pravdu a jedno klamstvo od tvora v červenom tričku. Na jeho treťom výroku nám nezáleží (pre zaujímavosť, bol určite pravdivý).

Všetky tvory splnili podmienky zo zadania, takže naše riešenie je správne. Žiadne ďalšie neexistuje, lebo sme nikde nič nehádali, ale sme všetko krásne priamo odvodili.

Odpoveď: Skutočný človek je tvor v červenom tričku.

Komentár: Príklad väčšina z vás pekne zvládla. Body sa strhávali za nesprávne vysvetlenie si výrokov s laboratóriami, za nedostatočné odôvodnenie, prečo je daný výrok pravda alebo klamstvo. 3 body ste stratili, keď ste neoverili, či celá úloha má naozaj riešenie a prípadne, keď ste neoverili či ich nemá viac, tak body šli bohužiaľ tiež preč. Síce to znie, že body len odchádzali, ale celkovo ste to zvládli perfektne:). Ste šikovní, že ste sa popasovali s takýmto príkladom a nezamotali sa v ňom:)

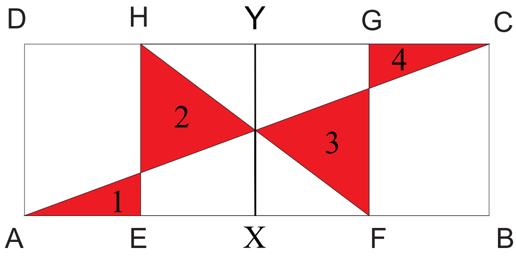
Príklad č. 6 (opravovali Monča, Mária):

Zadanie:

Riešenie: K riešeniu si nakreslíme obrázok vlajky (Obrázok 9).

Označme S priesečník úsečiek AC a FH. Štvoruholník $AFCH$ bude rovnobežník, jeho uhlopriečky sa teda rozpoľujú. Potom S je v strede uhlopriečky AC, takže je v strede medzi úsečkami AD a BC. Preto, keď cez tento bod vedieme priamku rovnobežnú s úsečkou AD, pretne obdĺžnik $ABCD$ v dvoch bodoch (X, Y) rozdeľujúcich úsečky AB a CD na polovicu. A pretože sa AE a FB rovnajú štvrtine AB, budú sa jej rovnať tak isto EX a XF ($\frac{AB-2\cdot\frac{1}{4}AB}{2}=\frac{1}{4}AB$).

Červené časti loga tvoria 4 trojuholníky, ktoré označíme číslami 1, 2, 3 a 4. Trojuholníky 1, 4 a tiež 2, 3 sú zhodné. Všimnime si, že výška trojuholníkov 1, 2 na stranu patriacu úsečke EH je rovnaká. Obsah trojuholníka sa rovná polovici súčinu strany trojuholníka a výšky kolmej na túto stranu. Súčet obsahov trojuholníkov 1 a 2 sa preto rovná $\frac{v\cdot x}{2}+\frac{v\cdot(EH-x)}{2}=\frac{v\cdot EH}{2}$ (stranu EH sme si rozdelili na dve časti, základňa trojuholníka 1 má dĺžku x, základňa 2 má dĺžku $EH-x$). Súčet obsahov trojuholníkov 3 a 4 je rovnaký ako súčet obsahov 1 a 2, preto sa súčet všetkých červených častí rovná $v\cdot EH=\frac{1}{4}AB\cdot EH$. Obsah obdĺžnika $ABCD$ je práve $AB\cdot EH$, vyfarbená červená časť sa teda rovná štvrtine celého loga.



Obrázok 9: Doplnená vlajka

Odpoveď: Vyfarbený vzor predstavuje $\frac{1}{4}$ loga.
Komentár: Príklad bol vpodstate jednoduchý, no často ste si ho príliš skomplikovali, a potom ste ho celkom neodôvodnili. Dostali sme sa však aj k nádherným riešeniam, za čo vás veľmi chválime. Snáď vám dám už len malú radu do budúcna, a to, aby ste príklad nepodcenili, aj keď riešenie viete po prvom prečítaní :).

Príklad č. 7 (opravovali Kozzy, ViRPo):

Zadanie:
Riešenie: Predstavme si, že počty atómov vo vrcholoch reprezentujú čísla. Jednotlivé útvary majú spoločné dva vrcholy, tri ležia iba v 5-uholníku, štyri iba v 6-uholníku. Spolu je to 9 bodov, v každom bude práve jedno číslo od 1 po 9. Súčet čísel vo všetkých vrcholoch bude práve súčet čísel od 1 po 9, čo je 45.

Keďže v 5- aj v 6-uholníku je súčet atómov 24, tak $24 \cdot 2 = 48$ je súčet čísel v celej molekule, pričom tie vrcholy, ktoré majú spoločné, sme zarátali dvakrát. Súčet čísel v spoločných bodoch je preto $48 - 45 = 3$. Súčet 3 vieme spomedzi čísel, ktoré máme k dispozícii dosiahnuť iba ako $2 + 1$. Existujú dve preskupenia týchto čísel v dvoch spoločných bodoch.

Súčet ostatných čísel v 5- aj 6-uholníku je $24 - 3 = 21$. Existujú tri trojice z čísel od 3 po 9, ktoré majú súčet 21, a to $9, 8, 4$; $9, 7, 5$ a $8, 7, 6$. Tieto trojice sa budú nachádzať v 5-uholníku, ostatné štyri čísla budú vo vrcholoch 6-uholníka.

Každú z trojíc vieme umiestniť do vrcholov 5-uholníka $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ spôsobmi (do prvého vrcholu môžeme umiestniť tri rôzne čísla, do druhého vyberáme z dvoch, no a do tretieho umiestnime zostávajúce). Podobne jednotlivé štvorice môžeme do vrcholov 6-uholníka uložiť $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ spôsobmi.

Čísla sa v 5-uholníku, 6-uholníku ale aj v dvoch spoločných bodoch premiestňujú úplne nezávisle na sebe. Aj keď sa len vymenia dve čísla v 5-uholníku a zvyšok sa nezmení, vznikne nám rôzne preskupenie. Pre každú z trojíc musíme teda počty možností usporiadania v našich troch častiach medzi sebou vynásobiť, ak chceme získať ich počet v celom útvare - $2 \cdot 6 \cdot 24 = 288$.

Toľkoto možností existuje pre každú z troch trojíc, takže celkový počet možností usporiadania čísel vo vrcholoch útvaru, je $3 \cdot 288 = 864$.
Odpoveď: Môže nastať 864 rôznych preskupení.
Komentár: Veľmi dôležité bolo pochopiť správne zadanie, často sa stalo, že ste iba našli čísla, ktoré mohli byť v 5-uholníku či 6-uholníku, nevypočítali ste však samotný počet preskupení. Mohli ste žiaľ získať najviac 4 body. Viacerí ste porobili menšie, alebo aj väčšie chyby pri výpočtoch, zabudli vynásobiť tromi či dvomi, prípadne nenašli všetky možnosti rozdelenia čísel do 5-uholníka a 6-uholníka. Za takéto chyby sme vám strhli asi 1 až 3 body.

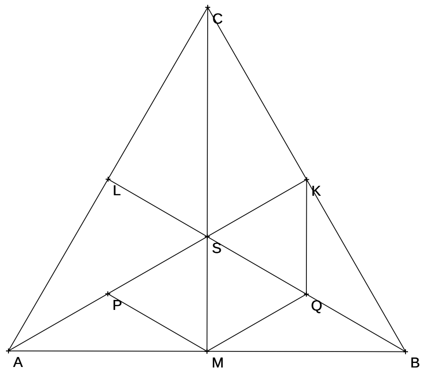
Príklad č. 8 (opravoval Peťo):

Zadanie:
Riešenie: Základná vec, ktorú si treba uvedomiť je, že vnútorné uhly v rovnostrannom trojuholníku(obrázok 10) sú rovné 60° a že ťažnica, výška a os uhla sú totožné a všetky rovnako dlhé. Body K a M sú stredy strán BC a AB (pretože ťažnica pretína stranu v strede) a uhly pri nich sú pravé (pretože výška je kolmá na stranu). Keďže úsečky AK aj CM sú ťažnice a ťažnice sa pretínajú v ťažisku, bod S je ťažisko. Jednou z vlastností ťažníc je, že ťažisko ich rozdeľuje na dve časti v pomere $2 : 1$ od vrchola. Úsečky AS a BS je sú dlhšími časťami ťažníc na strany AC a BC. Body P a Q sú stredy úsečiek AS a BS, takže úsečky AP, PS, SM, SQ, QB a SK sú rovnako dlhé. Z toho vieme, že dve strany štovruholníka $PMQK$ (strany PM a QK) sú rovnaké.

Úsečka CM je tiež výška na stranu AB, uhol CMA je teda pravý. Úsečka AK je osou uhla BAC, takže uhol KAM má veľkosť 30° (polovica z uhla BAC, ktorý má veľkosť 60°). Trojuholník AMS má jeden vnútorný uhol rovný 30° a ďalší 90°, jeho tretí uhol (uhol ASM) musí mať teda veľkosť $180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ (lebo súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°).

V trojuholníku PMS majú jeho ramená PS a MS rovnakú dĺžku, preto musia byť uhly, ktoré zvierajú s treťou stranou rovnaké (vlastnosť každého rovnoramenného trojuholníka). Pretože uhol, ktorý zvierajú tieto dve ramená je 60°, tak uhly, ktoré zvierajú s treťou stranou budú mať veľkosť $(\frac{180^\circ - 60^\circ}{2}) = 60^\circ$, teda trojuholník PMS je rovnostranný. Obdobne to platí aj pre trojuholníky MQS a QKS. Keďže uhol BMC je pravý a uhol QMC je 60° (trojuholník MQS je rovnostranný), tak uhol BMQ má veľkosť $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Uhly BAK a BMQ sú striedavé (zvierajú s úsečkou AB rovnaký uhol 30°), preto úsečky AK a MQ sú navzájom rovnobežné. Takže štvoruholník $PMQK$ môže byť buď rovnobežník alebo lichobežník. Uhly KPM a PKQ však majú rovnakú veľkosť (60°) musí byť teda lichobežník so základňami PK a MQ. A keďže jeho ramená PM a KQ majú rovnakú veľkosť, je to rovnoramenný lichobežník.



Obrázok 10: obrázok k príkladu 8

Každá ťažnica rozdeľuje trouholník na dva obsahovo zhodné trouholníky, všetky tri spolu rozdeľujú trojuholník na šesť obsahovo zhodných trojuholníkov. Čiže trojuholníky AMS, MBS, BKS a SKC majú rovnaký obsah, ktorý je rovný $\frac{1}{6}$ obsahu trojuholníka ABC. Úsečky PM, MQ a KQ sú ťažnice trojuholníkov AMS, MBS a BKS (sú to spojnice stredov strán a protiľahlých vrcholov), teda trojuholníky AMP, PMS, MQS, MBQ, BKQ a QKS majú rovnaký obsah, ktorý je rovný polovici obsahu trojuholníkov AMS, MBS a BKS (opäť vlastnosť ťažníc). Obsah týchto trojuholníkov je $\frac{1}{6}$ obsahu trojuholníka ABC, obsah trojuholníkov AMP, PMS, MQS, MBQ, BKQ a QKS je potom $\frac{1}{12}$ obsahu trojuholníka ABC. Lichobežník $PMQK$ sa skladá z troch z týchto trojuholníkov (PMS, MQS a QKS) a teda jeho obsah je rovný $\frac{3}{12}$, čo je $\frac{1}{4}$ obsahu trojuholníka ABC. Obsah trojuholníka ABC je $36\,\mathrm{km}^2$, a preto obsah lichobežníka je $\frac{36\,\mathrm{km}^2}{4} = 9\,\mathrm{km}^2$.
Odpoveď: Obsah lichobežníka je $9\,\mathrm{km}^2$.
Komentár: Väčšina z vás zvládla vypočítať obsah lichobežníka a tiež, dokázať, že je rovnoramenný, avšak ste zabúdali dokázať, že daný útvar je lichobežník, za čo ste stratili body.

Príklad č. 9 (opravovala Natali):

Zadanie:
Riešenie: Prvou Matildinou úlohou bolo zistiť, či vie z päťuholníka, ktorý má vo vrcholoch čísla od jedna po päť dostať päťuholník, ktorý má vo vrcholoch samé trojky tak, že vždy o jedna zmenší alebo zväčší čísla v troch susedných vrcholoch (tento úkon nazvime "ťah"). S touto časťou úlohy sa stačilo len trochu pohrať, skúsiť si pár ťahov a riešenie bolo na svete. Napríklad to mola byť postupnosť ťahov, ako je na obrázku 11.

Druhá časť úlohy bola až nápadne podobná, ako prvá – jediný rozdiel bol v tom, že Matilda mala vyrobiť päťuholník so samými päťkami vo vrcholoch. Ako nám môže napovedať nejaký šiesty zmysel alebo intuícia, táto časť úlohy sa už nebude dať tak ľahko vyriešiť, ako časť prvá. Inak povedané, s veľkou pravdepodobnosťou sa nebude dať vyriešiť vôbec. Poďme sa zamyslieť nad tým, čím to môže byť.

Nájdime to, v čom sa naše dve úlohy líšia. V oboch začíname s tým istým päťuholníkom – takým, ktorý má vo vrcholoch čísla od jedna po päť. Všimnime si, že tieto čísla dávajú súčet 15. V prvej úlohe sme mali dostať päťuholník so samými trojkami vo vrcholoch. Súčet čísel vo vrcholoch tohto päťuholníka je taktiež 15. V druhej úlohe máme dostať päťuholník so samými päťkami, ktorý má tým pádom súčet vo vrcholoch 25. Čo o týchto troch súčtoch vieme povedať? Všimneme si, že číslo 15 je deliteľné tromi, kým číslo 25 nie je.

Teraz si všimneme, čo sa so súčtami čísel vo vrcholoch bude diať po jednotlivých ťahoch. V každom ťahu sa tri čísla zmenšia alebo zväčšia o 1, takže súčet všetkých čísel vo vrcholoch sa zmenší alebo zväčší o tri. Teda zvyšok, ktorý dáva súčet po delení tromi zostáva po každom ťahu rovnaký. To ale znamená, že ak bol súčet na začiatku deliteľný tromi, táto vlastnosť sa po žiadnom ťahu nezmení, súčet zostane vždy deliteľný tromi.

Vráťme sa k Matildinej úlohe, ktorou je zmeniť súčet vo vrcholoch päťuholníka z 15 na 25. Keďže sme zistili, že Matilda svojim ťahom nikdy ndostane iný súčet ako násobok troch, určite nevie zo súčtu 15 dostať súčet 25. A to sme chceli ukázať.

Povedzme si o tejto úlohe ešte trošku viac. Aj keď sa vám táto úloha príliš nepodobá na bežné hry, z matematického hľadiska je to jednoznačne hra (aj keď len pre jedného hráča). Vždy sa rozhoduje, či vieme vyhrať, teda splniť zadanie, alebo či určite prehráme. Zistili sme ako fungujú súčty vo vrcholoch, takže už vieme pre každý začiatočný a konečný stav (čísla v päťuholníku, s ktorými začíname a s ktorými máme skončiť) s istotou povedať, či môže vyhrať alebo nie – stačí sa pozrieť na to, či súčet vo vrcholoch začiatočného a konečného päťuholníka dáva rovnaký zvyšok po delení tromi (ak dáva, tak ešte treba nájsť postupnosť ťahov, ktorou sa dá dostať zo začiatočného stavu do konečného). Táto vlastnosť sa v hrách nazýva *invariant*; teda niečo nemenné, stále. Pri hrách dvoch hráčov je takisto dôležitý pojem *víťazná stratégia*, ktorá sa pri väčšine hier hľadá. Takto sa nazýva spôsob hry pre jedného z hráčov, ktorý mu zaručí výhru, nech zvyšní hráči ťahajú akokoľvek.

Ako sa na ten invariant dá prísť? Odpoveď je jednoduchá – treba využívať všetky informácie, ktoré sú v zadaní a snažiť sa ich nejako premeniť na užitočné. Časté triky sú nahrádzanie čísel ich súčtami a všímanie si zvyškov po delení vhodnými číslami, alebo všímanie si len nejakých veľmi špecifických pozícii.

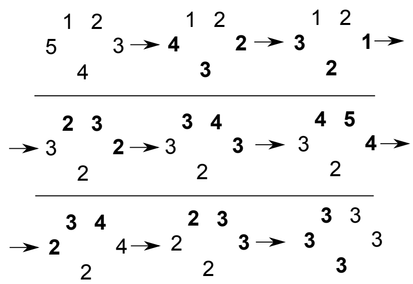
Príklad na prvý typ hry je známy "Námornícky Nim", hra pre dvoch hráčov. Na stole je niekoľko (napríklad 25) zápaliek, hráč v svojom ťahu vie zobrať 1, 2 alebo 3 z nich a vyhráva ten, ktorý vezme poslednú. Skúste nájsť víťaznú stratégiu pre prvého hráča. Trochu vám napovieme, že teraz si treba všímať deliteľnosť štyrmi. A ako by to vyzeralo, keby bolo na začiatku len 24 zápaliek? Ktorý z hráčov by mal víťaznú stratégiu tentokrát?

Príklad na druhý typ hry je napríklad takýto: Na stole je vedľa seba uložených 24 kariet. Každá z kariet má jednu stranu žltú a druhú zelenú, zatiaľ sú všetky položené žltou stranou nahor. Za týmto stolom stoja dvaja ľudia (z jednej strany) a ťahajú tak, že vždy otočia nejakých 5 kariet, ktoré ležia hneď za sebou a prvá z nich je žltá. Prehráva ten, ktorý prvý nemôže urobiť ťah. Skúste zistiť, či vôbec niekedy môže druhý hráč prehrať.

Na záver ešte jedna dôležitá vec, na ktorú pri hľadaní invariantov nesmieme zabúdať. Objavením invariantu často nájdeme len akúsi *nutnú podmienku* ktorá musí byť splnená, ale neznamená to, že všetky prípady spĺňajúce túto podmienku vyhovujú zadaniu. Teda po objavení invariantu musíme ešte overiť, či taká podmienka stačí. Ak sme v našej pôvodnej úlohe zistili, že súčet čísel musí byť deliteľný tromi, musíme aj overiť, že ak je súčet deliteľný tromi, existuje taká postupnosť ťahov, ktorá vedie k riešeniu.

Ak sa vám zdá, že to čo vravím nedáva zmysel, zamyslite sa nad posledným príkladom: Šachovnicu $n \times n$ treba vykachličkovať tetraminami v tvare T. Každý si všimne, že na to, aby sme úlohu vedeli splniť, musí byť počet políčok šachovnice násobok štyroch. Problém však je, že šachovnicu 4×4 vykachličkovať vieme, kým šachovnicu 6×6 nie, aj napriek tomu, že $6 \cdot 6 = 4 \cdot 9$. Skúste sa zamyslieť, prečo je to tak.

Komentár: S príkladom sa väčšina z vás vysporiadala veľmi dobre, máte u mňa pochvalu. A verím, že aj tí z vás, ktorým to tentokrát nevyšlo uplne najlepšie, zistili, kde bol problém a nabudúce už to budú mať vynikajúco. A ak by vám náhodou nedali spať otázky na rozmýšľanie, ozvite sa, napríklad na `natalia.karaskova@gmail.com` alebo `pavol@gurican.sk`, radi vám pomôžeme :)



Obrázok 11: Napríklad takto mohla Matilda ťahať.

Prémia (opravovala gubika):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Jediným háčikom je, že nepoznajú, ktoré sú falošné a ktoré pravé, vyzerajú totiž na vlas rovnako. V mešci máme 5 mincí. Tri z nich sú pravé a zvyšné dve falošné. Vieme, že všetky pravé mince vážia rovnako a dve falošné vážia rovnako. Nevieme však, či sú pravé ľahšie alebo ťažšie ako falošné. Nemajú nič, len rovnoramenné váhy. Ako vedia čo najrýchlejšie (na čo najmenej vážení) určiť aspoň jednu pravú mincu? Koľko vážení budú potrebovať?

Riešenie: Chceme nájsť najmenší počet vážení, na ktorý vieme nájsť aspoň 1 pravú mincu. Poďme teda od začiatku. Dá sa to spraviť na jedno váženie? Odpoveď je nie. Ak by sme odvážili dve mince z mešca mohli by sme dostať buď, že sa ich hmotnosti rovnajú (teda sú to buď dve pravé mince a v mešci nám ostali 2 falošné a 1 pravá alebo sú to dva falošné a ostali nám v mešci 3 pravé, nevieme ale, ktorá z možností to je), alebo sa líšia (na váhach máme jednu falošnú a jednu pravú mincu, v mešci dve pravé a falošnú). Z toho by sme pravú mincu nevedeli určiť.

Ak by sme na váhy dali 4 (dve a dve) mince, mohli by sme síce dostať možnosť, že sa nám hmotnosti rovnajú (na váhe máme na každej strane pravú a falošnú mincu a zostávajúca je pravá), ale toto riešenie nie je všeobecné, hmotnosti sa nám môžu nerovnať a vtedy nevieme určiť pravú mincu.

Ak by sme na váhu položili 3 alebo 5 mincí, nič by sme nezistili, ani keby sa hmotnosti rovnali, ani keby bola jedna strana ťažšia ako druhá.

Musíme hladať riešenie na viac ako 1 váženie, tých je viacej, preto si uvedieme to najjednoduchšie. Urobíme dve váženia, na prvýkrát porovnáme hmotnosti prvej a druhej mince, pri druhom vážení odvážime tretiu a štvrtú mincu z mešca. Môžu nastať nasledujúce možnosti:

1. Pri prvom aj druhom vážení sa nám hmotnosti rovnajú. Teda sme raz trafili dve pravé a raz dve falošné mince (na poradí nezáleží). Zostávajúca minca je potom určite pravá.
2. Pri jednom vážení sa hmotnosti rovnajú a pri druhom nie (na poradí opäť nezáleží). Pri vážení, kde je jedna minca ťažšia ako druhá, máme jednu pravú a jednu falošnú mincu. Keďže v mešci sme mali dokopy iba 2 falošné mince, pri vážení kde sa hmotnosti rovnajú musia byť obe mince pravé.
3. V oboch váženiach bola jedna minca ťažšia ako druhá. Dvakrát sme museli porovnávať dvojicu pravá a falošná minca. Zostávajúca minca musí byť pravá.

Takto sme dokázali nájsť aspoň 1 pravú mincu na 2 váženia.

Odpoveď: Na nájdenie aspoň jednej pravej mince potrebujeme minimálne dve váženia.
Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla ale boli aj prípady, keď ste chceli postupovať akoby postupne, tak sa určite k najmenšiemu počtu vážení nedostanete. Príklad sa dal riešiť na dva ťahy aj iným postupom, ktorý bol dokonca aj raz medzi riešeniami, ten bol ale trocha dlhší.