Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2009/2010

Príklad č. 1 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania vieme, že kód má v prvom riadku dve cifry, v druhom tri cifry a v treťom štyri cifry. Čísla vzniknuté v riadkoch sú zrkadlové. Tak pozrieme sa na to, aké čísla vieme doplniť.

Najprv sa zamyslíme, aký najväčší súčet nám môže dať dvojciferné a trojciferné číslo. Zvolíme si najvyššie možné sčítance: $99 + 999 = 1098$. Prvá cifra výsledku je 1. Z toho vidíme, že prvá cifra v treťom riadku nemôže byť väčšia ako 1 (použili sme najväčšie dvoj- a trojciferné sčítance). Tretie číslo nemôže začínať nulou, a preto prvá cifra v treťom riadku musí byť práve táto jednotka. Aby bolo číslo zrkadlové, musí aj posledná cifra v treťom riadku byť 1.

Na príklade $99 + 999 = 1098$ je ešte niečo zaujímavé. Napriek všetkej snahe (tým myslím sčítanie najväčších možných sčítancov) sme nedostali na mieste stoviek (teda druhá cifra) číslo väčšie ako 0. Tým pádom tu nič iné ako 0 ani nemôže stáť. Aby bolo číslo zrkadlové, musí aj jeho tretia cifra byť 0.

Zistili sme, že číslo v treťom riadku musí byť 1001. Čo však s ostatnými?

Vieme, že pri sčítavaní dvoch cifier môžme prekročiť desiatku najviac raz ($9 + 9 = 18$, cez 20 sa nedá prejsť). Hľadajme teraz prvú cifru druhého čísla. Z predošlého stĺpca sa prenesie buď nič alebo 1. Ak by sa neprenieslo nič, potom by táto cifra musela byť 10, čo je samozrejme nezmysel. Takže sa musí preniesť jednotka. Platí, že 1+prvá cifra druhého čísla=10. Z tohto dokážeme zistiť, že prvá a kvôli zrkadleniu aj tretia cifra druhého čísla je 9.

Pozrime sa teraz spoločne na stĺpec úplne napravo. Keďže je prvý pri sčítavaní, nič sa nám neprenáša z predošlého. Musíme doplniť cifru z prvého riadku, aby po pričítaní deviatky k nej sme dostali číslo končiace jednotkou. Toto platí iba pre dvojku, $2 + 9 = 11$. Aby bolo číslo v prvom riadku zrkadlové, musí to byť číslo 22.

Už máme skoro celý kód. Poznáme prvé číslo: 22, tretie číslo: 1001 a z druhého vieme prvú a tretiu cifru: 9. Potrebujeme dorátať strednú cifru druhého čísla. Vieme, že odrátaním prvého čísla od tretieho čísla dostaneme druhé číslo: $1001 - 22 = 979$. S veľkou radosťou vidíme, že prvá aj tretia cifra je 9 a spoznali sme strednú cifru.

Dôležité je overiť, či neexistuje nejaké ďalšie riešenie. V tomto príklade určite žiadne nie je, lebo sme nikdy nič netipovali, ale sme systematicky všetky cifry z kódu zistili.

Odpoveď: Kód sa skladal z čísel 22, 979 a 1001.

Komentár: Tento príklad ste všetci riešitelia vyrátali ľahko. Avšak netreba iba skúšať, niekedy je lepšie sa zamyslieť a postupne objavovať číselká:)

Príklad č. 2 (opravovali Danka, Jančo):

Zadanie:

Riešenie: Ak sa číslo po vynásobení svojím ciferným súčtom zväčší 10-krát, tak sme ho museli vynásobiť desiatimi, aby sme dostali číslo 10-krát väčšie. To znamená, že ciferný súčet obľúbeného čísla je 10.

$$\text{obľúbené číslo} \cdot \text{jeho ciferný súčet} = 10 \cdot \text{obľúbené číslo}$$

Tým pádom Matildine obľúbené číslo nie je jednociferné, lebo ciferný súčet jednej cifry nemôže byť 10.

Pozrime sa teda na dvojciferné riešenia. Čísla, ktoré majú ciferný súčet 10 sú: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Keďže 71668 je súčin Matildiných obľúbených čísel, hľadané čísla musia deliť bezo zvyšku tento súčin. Teraz zistíme, ktoré z týchto čísel delí číslo 71668 bezo zvyšku (každým z nich skúsime deliť). 71668 delia bezo zvyšku čísla: 19, 46, 82. Nie je na škodu ich vynásobiť, dostaneme 71668. Aha, s akým šťastím máme už jedno riešenie.

Čísla 46 a 82 sú párne, teda deliteľné dvoma: $46 = 2 \cdot 23$ a $82 = 2 \cdot 41$.

Číslo 71668 sa „skladá“ z týchto čísel:

$$71668 = 19 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 41$$

a tie sa nedajú ďalej deliť na menšie (sú to prvočísla).

Poznámka: Prvočíslo je také číslo, ktoré sa dá bezo zvyšku vydeliť iba číslom 1 a sebou samým. Pri delení inými číslami vždy dostaneme nejaký zvyšok. Napríklad číslo 19 je prvočíslo, lebo $19 : 19 = 1$, zvyšok 0 a $19 : 1 = 19$ zvyšok 0, ale skúste si ho vydeliť číslami 2, 3, 4, 5, ..., 18. Aké zvyšky dostanete? Číslo 2 je tiež prvočíslo. Súčinu vyššie sa hovorí *rozklad čísla na prvočísla*.

Obľúbené čísla budú súčinom nejakej kombinácie čísel 2, 2, 19, 23 a 41. Napríklad 5 obľubených čísel by muselo byť práve týchto 5. Avšak dvojka nemá ciferný súčet 10. Matilda nemôže mať 5 obľúbených čísel. Napríklad 4 obľúbené čísla by mohli byť: $2, 2 \cdot 19, 23, 41$. Ale dvojka nemá ciferný súčet 10. Ešte iná možnosť ako mať 4 obľúbené čísla je: $2 \cdot 2, 19, 23, 41$, ale štvorka nemá ciferný súčet 10. Ešte existujú ďalšie možnosti ako mať 4 obľúbené čísla (vypíš si). V každej vystupuje číslo 2 alebo 4 a tie nemajú ciferný súčet rovný 10. Matilda nemôže mať 4 obľúbené čísla. Pre tri obľúbené čísla poznáme jedno riešenie. Existuje aj nejaké iné? Keby boli obľúbené čísla 3, tak možnosti sú: 19, 23 a 164; 19, 46 a 82; 19, 41 a 92; 23, 41 a 76; 23, 38 a 82; 38, 41 a 46. Môžu to byť však iba čísla 19, 46 a 82. Ostatné kombinácie nevyhovujú, lebo vždy aspoň jedno číslo nemá ciferný súčet rovný 10.

Keby boli obľúbené čísla 2, tak možnosti sú: 19 a 3772; 23 a 3116; 41 a 1748; 38 a 1886; 46 a 1558; 82 a 874; 76 a 943; 92 a 779; 164 a 437; Ani jedna kombinácia nevyhovuje.

Odpoveď: Matildine obľúbené čísla sú 19, 46 a 82.

Komentár: Strhávali sme vám body, keď ste nám nevysvetlili, prečo existuje iba jedno riešenie. Rovnako bolo potrebné vysvetliť, prečo je ciferný súčet 10. Aj keď sa vám to zdá logické, treba to nabudúce napísať :).

Príklad č. 3 (opravovali Monča, Henry):

Zadanie:

Riešenie: Začneme rovnosťou v poslednom stĺpci. $FDC : HH = HB$. Môžeme si ju otočiť: ak FDC deleno HH je HB, musí platiť aj HH krát HB je rovné FDC. Skúsme nájsť cifru schovanú za písmenom H. Možnosti:

$H = 1$ Po vynásobení $11 \cdot 1B$ dostaneme číslo tvaru 1_ _ pre $B \leq 8$, t.j. na mieste stoviek bude vždy jednotka. To znamená, že $F = 1$, ale F nemôže mať tú istú hodnotu ako H. Pre $B = 9$ je výsledok násobenia 209, potom však $C = 9$ a zároveň aj $B = 9$, a to nevyhovuje podmienkam. Takže H nemôže byť rovné 1.

$H = 3$ B nemôže byť 0, lebo vystupuje v čísle BEA ako prvá cifra. Takže B je najmenej 1, v takom prípade je $HH \cdot HB = 33 \cdot 31 = 1023$ a to je štvorciferné číslo. Pre väčšie B bude výsledok násobenia už len väčší, teda tiež štvorciferný. Avšak číslo FDC má byť trojciferné. Takže H nemôže byť rovné 3.

$H \geq 4$ H nemôže byť 4 a viac, pretože by po vynásobení vznikali len štvorciferné výsledky.

Takto sme vylúčili všetky čísla okrem jedného: $H = 2$.

Teraz zistíme hodnotu písmena B. Budeme zaň dosadzovať čísla do rovnosti $22 \cdot 2B = FDC$.

$B = 0$ Už vieme, že B nemôže byť rovné 0, lebo vystupuje v čísle BEA ako prvá cifra.

$B = 1$ Dosadíme: $22 \cdot 21 = 462$, H má tú istú hodnotu ako C. Teda B nemôže byť rovné 1.

$B = 2$ Za B iež nemôžme dosadiť 2, rovnalo by sa potom s písmenom H.

$B = 3$ Môže platiť, že $B = 3$. Potom by dosadená rovnosť bola $22 \cdot 23 = 506$, a tá zatiaľ vyhovuje všetkým podmienkam.

$B = 4$ Po dosadení máme $22 \cdot 24 = 528$, D má tú istú hodnotu ako H. Nevyhovuje.

$B = 5$ Po dosadení máme $22 \cdot 25 = 550$, F má tú istú hodnotu ako H. Nevyhovuje.

$B = 6$ Po dosadení máme $22 \cdot 26 = 572$, C má tú istú hodnotu ako H. Nevyhovuje.

$B = 7$ Po dosadení máme $22 \cdot 27 = 594$, zatiaľ vyhovuje všetkým podmienkam.

$B = 8$ Po dosadení máme $22 \cdot 28 = 616$, C má tú istú hodnotu ako F. Nevyhovuje.

$B = 9$ Po dosadení máme $22 \cdot 29 = 638$, zatiaľ vyhovuje všetkým podmienkam.

Z tohto dosadzovania sme zistili, že B môže byť 3, 7 a 9.

Dosaďme všetky tri možnosti do rovnosti $AAB + CB = FDC$ v prvom riadku.

$B = 3$ Po dosadení máme $AA3 + 63 = 506$. Odčítaním $506 - 63 = 443$ získame hodnotu $A = 4$. Zatiaľ vyhovuje.

$B = 7$ Po dosadení máme $AA7 + 47 = 594$. Odčítaním $594 - 47 = 547$ zistíme, že nevyhovuje. Číslo AAB nemôže byť rovné 547.

$B = 9$ Po dosadení máme $AA9 + 89 = 638$. Odčítaním $638 - 89 = 549$ zistíme, že nevyhovuje.

Jediná možnosť rovnosti $AAB + CB = FDC$ je $443 + 63 = 506$. Teraz už vieme hodnoty šiestich premenných: $A = 4$, $B = 3$, $C = 6$, $D = 0$, $F = 5$ a $H = 2$.

Tieto hodnoty použijeme v treťom riadku: $CP - AC = HB$ je po dosadení $6P - 46 = 23$, z toho vieme, že P je 9. Použijeme rovnosť z druhého stĺpca: $CB - KE = AC$ je po dosadení $63 - KE = 46$. Z toho zistíme $KE = 17$.

Odpoveď: Príklad má len jedno riešenie: $A = 4$, $B = 3$, $C = 6$, $D = 0$, $E = 7$, $F = 5$, $H = 2$, $K = 1$, $P = 9$.

$$\begin{array}{ccccc}
443 & + & 63 & = & 506 \\
- & & - & & : \\
374 & : & 17 & = & 22 \\
= & & = & & = \\
69 & - & 46 & = & 23
\end{array}$$

Komentár: Body sme strhli keď ste nevylúčili všetky možnosti, alebo keď ste nejaké tvrdenie odôvodnili „lebo to tak je“. My potrebujeme vedieť všetko, takže nám nabudúce napíšte každý krok k výsledku :).

Príklad č. 4 (opravovali Emil, Dada, ViRPo):

Zadanie:

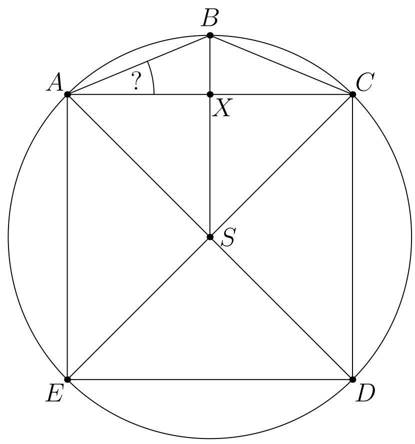
Riešenie: Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi, či už cez doplnenie do 8-uholníka, alebo cez nejaké tie rovnoramenné trojuholníky. Toto bude riešenie cez rovnoramenné trojuholníky (náčrtok je na obrázku 1). Vieme, že uhlopriečky v štvorci sú na seba kolmé, takže veľkosť uhla $ASC = 90°$. Úsečka BS je osou uhla ASC (pretože trojuholník ASC je rovnoramenný) a teda nám rozdeľuje uhol ASC na dva rovnaké uhly ($|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC|$), takže $|\sphericalangle ASB| = 45°$. Ďalej si môžme všimnúť, že úsečky AS, BS, CS, DS a ES majú rovnakú dĺžku, pretože sú to polomery kružnice opísanej štvorcu. Z toho vyplýva, že trojuholník ABS je rovnoramenný (pretože má strany AS, BS rovnaké) a preto o ňom vieme povedať, že uhly pri vrcholoch A a B sú rovnaké. Ďalej vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Vyrátajme veľkosť uhla BAS:

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SBA| = \frac{(180° - 45°)}{2} = \frac{135°}{2} = 67,5°$$

Trojuholník ASX je pravouhlý (pretože v rovnoramennom trojuholníku ASC je ťažnica SX kolmá na základňu AC). Už poznáme veľkosti dvoch uhlov: $|\sphericalangle SXA| = 90°$ a $|\sphericalangle ASX| = 45°$, takže uhol XAS musí mať 45°, aby súčet uhlov v trojuholníku ASX bol rovný 180°. A teraz už len posledný krok, a to, že uhol BAS je zložený z uhla BAC a uhla XAS. Poznáme veľkosti uhlov BAS aj XAS, takže dopočítame veľkosť uhla BAC:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAS| - |\sphericalangle XAS| = 67,5° - 45° = 22,5°$$

A hotovo :).



Obrázok 1: Náčrtok domu

Odpoveď: Strecha s domom zviera uhol $22,5^\circ$.
Komentár: Väčšina z vás príklad zvládla výborne (až niekedy nebolo za čo strhávať body ;)). Body sme strhávali, ak ste nevysvetlili, prečo bol súčet uhlov v nejakom útvare práve taký (konkrétne väčšinou pri tých často používaných 8-uholníkoch) a len za drobné chyby (či už len numerické, alebo nedovysvetlenie niečoho).

Príklad č. 5 (opravovali Uľa, Marka, Phil):

Zadanie:
Riešenie: Takže začneme pekne od začiatku, od jednotiek. Vo výsledku máme na mieste jednotiek 0. To znamená, že po sčítaní jednotlivých číslic na mieste jednotiek musíme dostať čísla ako 0, 10, 20.... Keď spočítame číslice na mieste jednotiek, dostaneme $7+6+0=13$. Najbližšie vhodné súčty sú 10 a 20 (30 sa nedá dosiahnuť). Aby sme dostali súčet 20, potrebovali by sme terajší súčet 13 zväčšiť o 7. Avšak, vieme ho zväčšiť najviac o 4 (Ak nahradíme 7 alebo 6 za štvorku, tak sa nám súčet zmenší), a to tak, že nahradíme 0 ($0+4=4$). Ale ak súčet zmenšíme o 3, dostaneme súčet 10. Toto dosiahneme tak, že 7 vymeníme za 4 ($7-4=3$). To znamená, že posledný stĺpec bude vyzerať takto (odhora): 4 6 0, pričom nám zostane zvyšok 1.

Teraz sa pozrime na miesto desiatok. Vo výsledku máme číslicu 7. To znamená, že po sčítaní číslic na mieste desiatok musíme dostať výsledok 7, 17, 27.... Keď spočítame číslice na mieste desiatok, ktoré sú v zadaní, tak dostaneme $0+2+8=10$. Keďže nám predtým zostal zvyšok, ten teraz pripočítame: $0+2+8+1=11$. Najbližšie vyhovujúce súčty sú 7 alebo 17.

Na súčet 7 potrebujeme jedenástku o 4 zmenšiť. To sa dá, keď nahradíme 8 ($8-4=4$). Takže v stĺpci na mieste desiatok dostaneme (odhora): 0 2 4 a zvyšok 0. Na súčet 17 potrebujeme jedenástku o 6 zväčšiť. To dosiahneme, keď nahradíme 0 a 2 ($(4-0)+(4-2)=4+2=6$). Dostaneme druhú možnosť (odhora) 4 4 8 so zvyškom 1.

Pozrime sa bližšie na prvú možnosť 0 2 4. Ak sčítame prvky sčítancov na mieste na mieste stoviek, tak nám vyjde súčet $9+8+3=20$, pričom nemáme zvyšok. Podľa výsledku v zadaní (ten je rovný 1) môžme prepokladať, že najbližšie vyhovujúce súčty, ktoré chceme dosiahnuť, sú 21 a 11. Na súčet 21 nám stačí jeden zo sčítancov zväčšiť o 1. Ako vidíme, jedine ak nahradíme 3, tak sa nám celkový súčet zväčší ($4-3=1$). Na mieste stoviek dostaneme (odhora) 9 8 4, so zvyškom 2.

Ale môžeme dostať aj súčet 11, keď zmenšíme súčet 20 o 9. Toto dosiahneme, jedine ak nahradíme 9 a 8 ($(9-4)+(8-4)=5+4=9$). Dostávame ďalšiu možnosť (odhora) 4 4 3 a zvyšok 1.

Teraz si vezmeme tú možnosť so zvyškom 2. Na mieste tisícok nám vyjde súčet $1+3+5=9$ plus zvyšok $1+3+5+2=11$. Keďže na mieste tisícok nám musí vyjsť súčet 11, aby nám zostal zvyšok 1, toto je jedno z riešení. Avšak súčet 11 vieme dostať, aj keď nahradíme 3 a 5 ($4+4+1=9$). Ak ešte prirátame zvyšok $1+4+4+2=11$, tak dostávame dalšie riešenie. Toto sú teda zatiaľ dve riešenia. Pozrime sa teraz na tú možnosť so zvyškom 1. Dostaneme, že súčet aj so zvyškom je: $1+3+5+1=10$. Aby sme dostali jedenástku, potrebujeme desiatku zväčšiť o 1. Nahradíme teda 3 ($4-3=1$). Takto sme dostali tretie riešenie (odhora) 1 4 5.

Ešte sme sa zabudli podrobnejšie pozrieť na možnosť, kde v stĺpci na mieste desiatok máme: 4 4 8. Na mieste stoviek nám vyjde súčet aj so zvyškom $9+8+3+1=21$. To znamená, že toto je riešením. Musíme ešte zistiť, či sa nedokáže k riešeniu dostať aj iným spôsobom. Ďalšie najbližšie vyhovujúce súčty sú 11 a 31. Oba sú vzdialené až o 10 a teda sa k nemu nedostaneme, lebo číslo 21 dokážeme najviac zväčšiť iba o 1, a to tak, že nahradíme 3 ($4-3=1$). Najviac zmenšiť ho vieme iba o 9 ($(9-4)+(8-4)=5+4=9$). Takže v tomto prípade jediným riešením stĺpca na mieste stoviek dostanmeme (odhora) 9 8 3, so zvyškom 2.

Keďže tento zvyšok je rovnaký ako pri možnosti 0 2 4, dostaneme také isté dve riešenia pre stĺpce na mieste tisícok: (odhora) 1 3 5 a 1 4 4.

Odpoveď: Dokopy máme 5 riešení.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 9 & 0 & 4 \\
 & 3 & 8 & 2 & 6 \\
 & 5 & 4 & 4 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 7 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 9 & 0 & 4 \\
 & 4 & 8 & 2 & 6 \\
 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 7 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 4 & 0 & 4 \\
 & 4 & 4 & 2 & 6 \\
 & 5 & 3 & 4 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 7 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 9 & 4 & 4 \\
 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
 & 5 & 3 & 8 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 7 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 9 & 4 & 4 \\
 & 4 & 8 & 4 & 6 \\
 & 4 & 3 & 8 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 7 & 0
\end{array}
$$

Komentár: Tento príklad, ste pomerne dobre zvládli, pekne postupne ste vypisovali možnosti. Avšak niekedy ste na nejaké zabudli, za čo sme vám potom museli strhnúť nejaké body.

Príklad č. 6 (opravoval Kozzy):

Zadanie:

Riešenie: Označme si lístok na koncert skupiny Akvasorbet A, na Bratoevrus B a na Candviu C. Zapíšme si informácie od predajcu takto:

$5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 50 eur
$2 \cdot A + 6 \cdot B + C$ stojí 27 eur

Z predajcovej druhej informácie vieme, že $2 \cdot A + 6 \cdot B + C$ stojí 27 eur. Koľko môže stáť B? Môže stáť 5 eur, 6 eur, 7 eur, 8 eur, ...? Nemôže, lebo cena za šesť lístkov (cena $6 \cdot B$) by bola postupne 30, 36, 42, 48 eur a viac. Už cena 30 eur za 6 lístkov B je viac ako 27 eur, ktoré má dokopy stáť $6 \cdot B$ s ešte ďalšími lístkami. Ostalo nám zopár možností: B môže stáť 1, 2, 3 alebo 4 eurá. Preskúmame každú z nich.

Ak B stojí 4 eurá, potom $6 \cdot B$ stojí 24 eur a $2 \cdot A + C$ musí stáť 3 eurá (aby dokopy tieto lístky stáli 27 eur). Lístok A môže stáť iba 1 euro, potom takisto C musí stáť 1 euro. Našli sme prvú možnosť ($A = 1, B = 4, C = 1$). Overme, či platí aj prvá informácia od predajcu. Prvá informácia hovorí, že $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 50 eur. Avšak v tejto možnosti stoja tieto lístky $5 \cdot 1 + 4 + 4 \cdot 1 = 13$ eur a nie 50, ako hovoril predajca. Takže táto možnosť nie je riešením. Keďže je to jediná možnosť, pri ktorej B stojí 4 eurá, môžeme povedať, že B nemôže stáť 4 eurá. Skúmame ďalej.

Ak B stojí 3 eurá, potom $2 \cdot A + C$ musí stáť 9 eur. Tu máme 4 možnosti:

- A môže stáť 4 eurá, potom C stojí 1 euro. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 27, má stáť 50.
- A stojí 3 eurá, potom C stojí 3 eurá. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 30.
- A stojí 2 eurá, potom C stojí 5 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 33.
- A stojí 1 euro, potom C stojí 7 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 36.

Vo všetkých možnostiach nesedí prvá informácia od predajcu. Teda B nestojí ani 3 eurá.

Ak B stojí 2 eurá, potom $2 \cdot A + C$ musí stáť 15 eur. Teraz máme 7 možností:

- A stojí 7 eur, potom C stojí 1 euro. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 41.
- A stojí 6 eur, potom C stojí 3 eurá. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 44.
- A stojí 5 eur, potom C stojí 5 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 47.
- A stojí 4 eurá, potom C stojí 7 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 50. To sedí s tým čo povedal predajca, našli sme prvé riešenie.
- A stojí 3 eurá, potom C stojí 9 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 53.
- A stojí 2 eurá, potom C stojí 11 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 56.
- A stojí 1 euro, potom C stojí 13 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 59.

V jednej možnosti sme našli riešenie úlohy: $A = 4, B = 2, C = 7$. Avšak skúmame ďalej, je možné, že existuje aj iné riešenie.

Ak B stojí 1 euro, potom $2 \cdot A + C$ musí stáť 21 eur. Máme 10 možností:

- A stojí 10 eur, potom C stojí 1 euro. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 55.
- A stojí 9 eur, potom C stojí 3 eurá. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 58.
- A stojí 8 eur, potom C stojí 5 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 61.
- A stojí 7 eur, potom C stojí 7 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 64.
- A stojí 6 eur, potom C stojí 9 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 67.
- A stojí 5 eur, potom C stojí 11 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 70.
- A stojí 4 eurá, potom C stojí 13 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 73.
- A stojí 3 eurá, potom C stojí 15 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 76.
- A stojí 2 eurá, potom C stojí 17 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 79.
- A stojí 1 euro, potom C stojí 19 eur. $5 \cdot A + B + 4 \cdot C$ stojí 82.

Hoci sme sa pri tomto skúšaní zapotili, nenašli sme riešenie, kde B stojí 1 euro.

Ďalšie možnosti nie sú, našli sme 1 riešenie. Možnosť nulovej ceny lístkov (koncert zadarmo:)) sme nepripúšťali (v zadaní je napísané, že cena je prirodzené číslo).

Iné riešenie: Podľa informácií od predajcu platí (pri označení ako v prvom riešení):

$$\begin{aligned} 2 \cdot A + 6 \cdot B + C &= 27 \\ 5 \cdot A + B + 4 \cdot C &= 50 \end{aligned}$$

Po sčítaní oboch rovníc získame

$$7 \cdot A + 7 \cdot B + 5 \cdot C = 77$$

Obe strany rovnice vyjadrujú rovnaké číslo, teda ak je pravá strana (=77) deliteľná 7, potom aj ľavá musí byť deliteľná 7. Čísla $7 \cdot A$ aj $7 \cdot B$ sú deliteľné 7, preto, ak aj súčet $7 \cdot A + 7 \cdot B + 5 \cdot C$ má byť deliteľný 7, tak potom aj $5 \cdot C$ musí byť deliteľné 7. Čísla 5 a 7 sú nesúdeliteľné, takže to znamená, že C je deliteľné 7.

Ak by C bolo rovné 14, alebo viac, potom $4 \cdot C = 56$ a viac, čo je viac ako 50 (a to podľa druhej rovnice nemôže). C teda môže byť jedine 7. Dostávame sústavu 2 rovníc o 2 neznámych:

$$\begin{aligned} 2 \cdot A \; + 6 \cdot B + 7 &= 27 \\ 5 \cdot A \; + B + 28 &= 50 \end{aligned}$$

Po vynásobení druhej rovnice šiestimi a odčítaní druhej rovnice od prvej dostávame

$$-28 \cdot A = -112$$

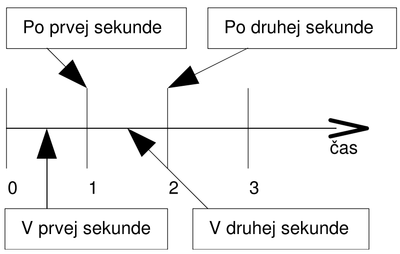
Po vydelení -28 dostaneme riešenie $A = 4$. Dosadením do pôvodnej prvej rovnice:

$$\begin{aligned} 8 + 6 \cdot B + 7 &= 27 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Odpoveď: Lístok na kapelu Akvasorbet stojí 4 eurá, na Bratoevrus 2 eurá a na Candviu 7 eur.
Komentár: Takmer všetci ste si poupravovali rovnice a ďalej skúšali dosadzovať rôzne hodnoty pre nejakú z cien lístkov. Nie všetci ste to však dotiahli do konca, pokiaľ ste našli prvé riešenie, ihneď ste skončili, čo nie je správny spôsob, keďže úloha takéhoto typu môže mať viacej riešení. Strácali ste za to od 1 do 3 bodov. Ak ste napísali len výsledok, prípadne ste doplnili, že ste si skúšali dosádzať rôzne hodnoty, nedostali ste viac ako 2 body. Rozumné je obmedziť si počet možností, ktoré treba vyskúšať tak, ako sme to spravili v prvom riešení (najväčším sčítancom na ľavej strane). Ostali nám potom len štyri možnosti pre B. To je už v silách človeka vyskúšať.

Príklad č. 7 (opravovala Betka):

Zadanie:
Riešenie: Pozri si obrázok 2, kde je nakreslené, čo znamená *v prvej sekunde* a čo znamená *po prvej sekunde*. Podľa zadania vyzerá rozpadanie baktérií tak, že v čase nula sekúnd (na počiatku sveta), je na priamke jedna baktéria. Počas plynutia prvej sekundy sa baktéria rozpadne dve dcéry a tie sa rozídu od pôvodnej polohy matky o jeden dielik. Keď sa na priamku pozrieme



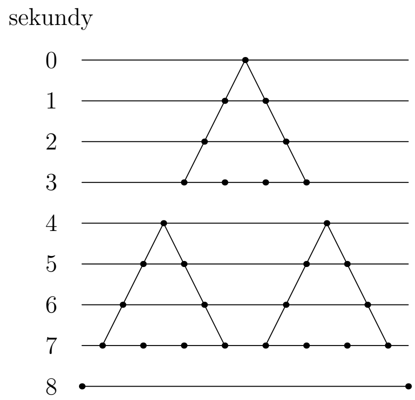
Obrázok 2: Čo znamená v sekunde a po sekunde

v čase 1 sekunda, teda v momente *po prvej sekunde* (pozerať sa budeme veľmi kratučký moment), uvidíme na priamke presne 2 baktérie, vzdialené od seba 2 dieliky. Čas plynie ďalej a v ďalšej sekunde (tentokrát už v druhej) sa nám 2 baktérie rozpadnú a ich potomkovia idú oboma smermi. Baktérie, ktoré išli od seba prežijú, ale baktérie, ktoré šli proti sebe, zaniknú. Pozrieme sa na priamku po druhej sekunde a vidíme 2 baktérie, vzdialené od seba 4 dieliky (pozri obrázok 3). Môžme si všimnúť, že ak sú dve baktérie od seba vzdialené 2 dieliky, tak v ďalšej sekunde ich potomkovia, idúci proti sebe, zaniknú. V tretej sekunde sa rozpadnú obe baktérie, pričom ani jeden z potomkov nezanikne. Po tretej sekunde máme štyri baktérie v rade za sebou, pričom susediace baktérie sú od seba vzdialené práve 2 dieliky. Na našom obrázku 3 nám vznikol trojuholník, ktorý má baktérie iba po obvode.

V štvrtej sekunde sa rozpadnú 4 baktérie, ale všetky dcéry, ktoré išli proti sebe zaniknú. Po štvrtej sekunde ostanú len dve krajné baktérie. Ak si ešte chvíľku budeme kresliť, tak zistíme, že sa nám vytvarajú dva nové trojuholníky, rovnaké ako ten na začiatku. Po troch sekundách (po siedmej sekunde) sa dostaneme do stavu, kedy máme na priamke rozmiestnených osem baktérií, medzi ktorými sú medzery práve 2 dieliky. Taktiež vidíme, že sa nám na obrázku 3 vytvorili dva úplne rovnaké trojuholníky, ako ten na začiatku. V ôsmej sekunde opäť takmer všetky baktérie zaniknú, až na tie krajné. Začnú nám vznikať znova dva trojuholníky.

Po jedenástej sekunde sú už trojuholníky kompletné. Vzniklo osem baktérií, ktoré už niesú vedľa seba, ale v dvoch skupinkách po štyroch (dva trojuholníky na krajoch). V jednotlivých skupinkách sú od seba vzdialené o 2 dieliky, ale skupinky sú od seba vzdialené 10 dielikov. V nasledujúcej sekunde (v dvanástej) prežijú už iba štyri baktérie, ktoré sú od seba vzdialené o 8 dielikov. Tentokrát nám začínajú vznikať štyri trojuholníky. Po troch sekundách (po pätnástej) máme na priamke 16 baktérií, ktoré su vzdialené od seba 2 dieliky. Ako očakávame, v nasledujúcej sekunde zaniknú všetky baktérie, až na dve krajné.

Ak sa teraz pozrieme na obrázok spätne, tak môžeme dedukovať, že v čase, ktorý je rovný mocnine dvojky máme na priamke len dve baktérie (pozri druhú sekundu $= 2^1$, štvrtú sekundu $= 2^2$, ôsmu sekundu $= 2^3$, šesťnástu sekundu $= 2^4 \ldots$).



Obrázok 3: rozmnožovanie a zanikanie baktérií

Chceme zistiť, koľko je baktérií po 129. sekunde. Máme šťastie, pretože po $128 = 2^7$ sekunde boli na priamke len dve baktérie. Teraz si už vydýchneme, lebo s istotou môžeme povedať, že v 129-tej sekunde sa na priamke budú nachádzať iba štyri baktérie (vzniknuté z dvoch krajných).
Odpoveď: Po 129. sekunde sa v trubici nachádzajú štyri baktérie.
Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla. Iba občas robilo problémy ako ste pochopili, že na začiatku je jedna baktéria. Niektorým potom po prvej sekunde vyšli správne 2 baktérie, a tí čo sa pomýlili mali dve baktérie až po druhej sekunde.

Príklad č. 8 (opravovala Jankaa):

Zadanie:
Riešenie: Obrázok vyzeral nejako takto (obrázok 4)

Vieme, že šírka obdĺžnika $ABCD$ sa rovná dĺžke obdĺžnika EFGH. To znamená, že na obrázku 4 platí $|AD| = |EH| = |BC| = |FG|$. Označme túto vzdialenosť x. Ďalej vieme, že body E, G delia strany AD, BC na polovicu. Vďaka tomu môžeme vzdialenosti $|AE|, |DE|, |BG|, |CG|$ označiť $\frac{x}{2}$. Zaznačme si tieto informácie do obrázka 5. Vidíme, že v trojuholníku FBG poznáme 2 strany a jeden uhol. To znamená, že ho vieme narysovať podľa vety SSU. Ďalej využijeme, že protiľahlé strany obdĺžnika sú rovnobežné a priľahlé strany zvierajú pravý uhol.

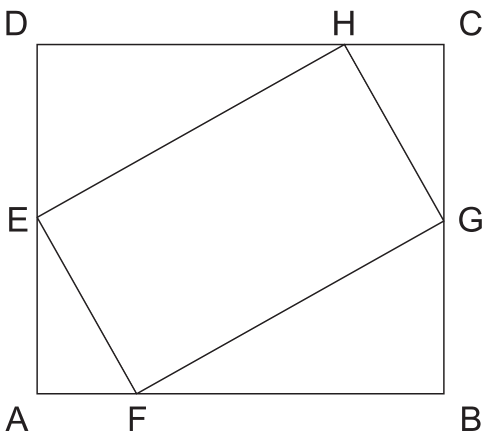
Popis konštrukcie:

1. $p, q; p \perp q$
2. $B; p \cap q = B$
3. $C, G; C, G \in q, |BG| = |CG|$ (obrázok 6)
4. $k; k\,(G, r = |BC|)$
5. $F, F'; F, F' \in k \cap p$ (obrázok 7)
6. $\overline{FG}$
7. $r; r \perp \overline{FG}, G \in r$
8. $s; s \perp \overline{BC}, C \in r$
9. $H; H \in r \cap s$ (obrázok 8)
10. $t; t \perp \overline{GH}, H \in t$
11. $u; u \perp \overline{FG}, F \in u$
12. $E; E \in t \cap u$ (obrázok 9)
13. $\square EFGH$
14. $v; v \perp p, E \in v$
15. $A, D; A \in p \cap v, D \in s \cap v$
16. $\square ABCD$ (obrázok 10)

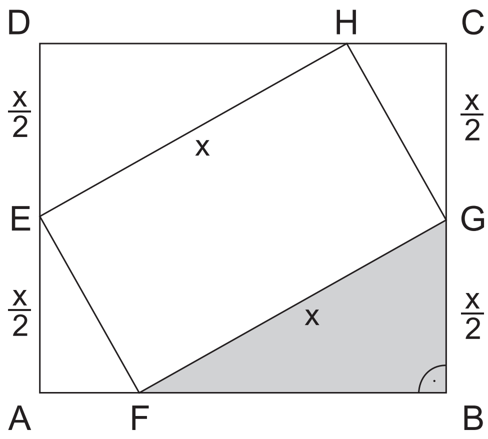
Úloha má ešte jedno riešenie, ktoré by sme získali v polrovine BCF' analogickým postupom (6-16). Obe riešenia vidíme na obrázku 11.
Komentár: Darilo sa vám celkom dobre, no mnohým z vás chýbal začiatočný rozbor, v ktorom vysvetlíte ako ste na riešenie prišli, čo využívate, odôvodníte jeho správnosť. Podľa toho bolo odstupňované aj hodnotenie. Správne riešenie, ktoré obsahovalo aj rozbor, dostalo 10 bodov. Riešenie so správnym popisom konštrukcie, ktorému zdôvodnenie chýbalo dostalo 8 bodov. 1 - 3 body vám mohli byť strhnuté za chyby a nepresnosti v popise konštrukcie. Ešte sa vyskytli aj riešenia hodnotené 0-1 bodmi. 0 bodov dostali zlé riešenia a 1 bod riešenia, ktoré nedodržali všetky podmienky zadania.

Príklad č. 9 (opravoval Palo):

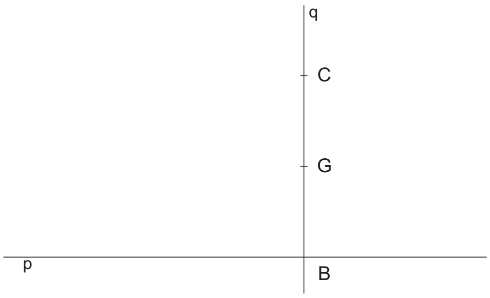
Zadanie:
Riešenie: Objasnime si najprv, čo vlastne znamenali 4 rôzne vlastnosti matematikov. *Pravosť* alebo *aplikovanosť* matematika hovorila o tom, či o svojich názoroch hovoril pravdu alebo klamal – praví matematici sú pravdovravní a aplikovaní klamári.



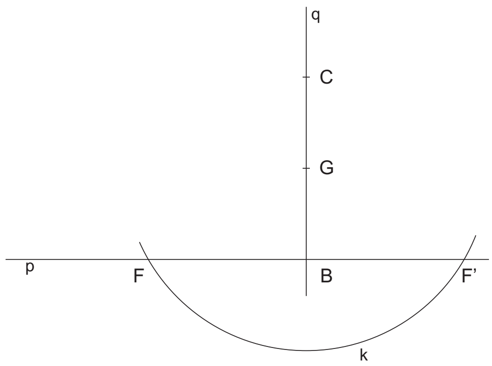
Obrázok 4: náčrt



Obrázok 5: náčrt



Obrázok 6: konštrukcia po 3. bode



Obrázok 7: konštrukcia po 5. bode

Rozumnosť a *bláznivosť* na druhej strane hovorili o správnosti názorov matematikov – názory rozumných sú správne, názory bláznivých nesprávne. To znamená, že ak aplikovaný a rozumný matematik vidí pravého a bláznivého matematika, myslí si o ňom, že je pravý a bláznivý ale povie o ňom, že je aplikovaný a rozumný. Pravý a bláznivý matematik si, naopak, o aplikovanom a rozumnom myslí, že je pravý a bláznivý a to isté o ňom aj nahlas povie. Vašou úlohou bolo na základe toho, čo matematici *tvrdia o svojich názoroch* určiť, aké dve z vlastností má každý z nich.

Dosť bolo úvodu, poďme na vec. Zostrojme si najprv tabuľku, čo o sebe povedia matematici s nejakými dvomi vlastnosťami(Tabuľka 1). Z tejto tabuľky vieme vyčítať dôležité poznatky - čo o sebe jednotlivý "druh" matematikov tvrdí a zároveň to, že výroky pravo-rozumných spolu s výrokmi aplikovano-bláznivých matematikov sú celkovo pravdivé, zatiaľčo výroky zvyšných dvoch druhov matematikov sú celkovo nepravdivé (inak povedané tí, čo hovoria pravdu o správnych názoroch a tí, čo klamú o nesprávnych, celkovo hovoria pravdu, zatiaľčo tí, čo klamú o správnych názoroch alebo tvrdia pravdu o nesprávnych názoroch, celkovo klamú).

Poďme sa už konečne pozrieť na jednotlivé výroky našich štyroch matematikov:

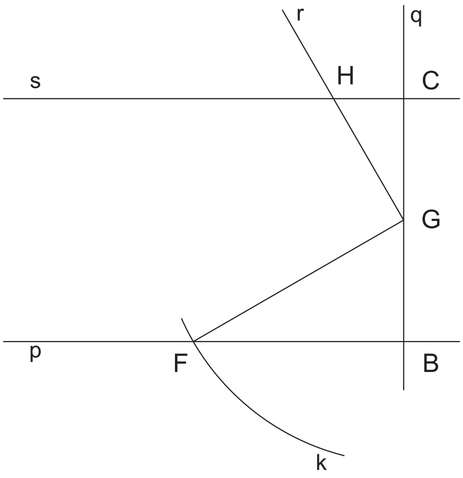
- Alice: "Som bláznivý matematik." Keď sa pozrieme do tabuľky, to, že je bláznivý matematik o sebe môže povedať len *aplikovaný* matematik.
- Bob: "Som pravý matematik." Tento výrok o sebe, podľa tabuľky, vie povedať len *rozumný* matematik.
- Charlie: "Som aplikovaný matematik." Podľa tabuľky vie o sebe takýto výrok povedať len *bláznivý* matematik.
- Dorothy: "Som rozumný matematik." To o sebe môže, opäť podľa tabuľky, povedať len *pravý* matematik.

Týmto pádom už vieme o každom z matematikov jednu z dvoch potrebných informácií. Pomocou druhých štyroch tvrdení, použitých v správnom poradí, vieme jednoznačne zistiť aj druhú vlastnosť každého matematika:

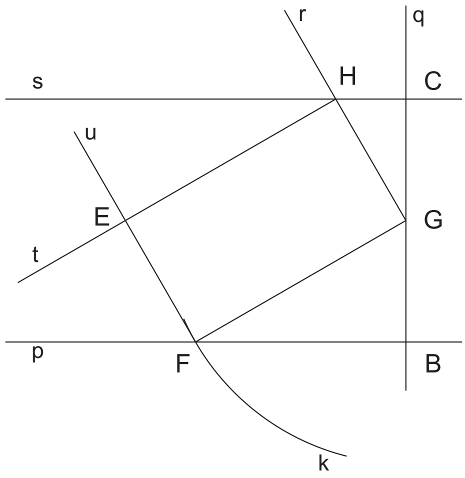
- Dorothy: "Charlie je rozumný matematik." No my už o Charliem vieme, že je bláznivý matematik, čiže Dorothin výrok je klamstvo. Klamú, ako už vieme, pravo-blazniví a aplikovano-rozumní matematici. Dorothy je pravý matematik, čiže zjavne musí byť aj bláznivý matematik.

Vlastnosti matematika	**Čo o sebe povedal?**
Pravý a rozumný	Pravý a rozumný
Pravý a bláznivý	Aplikovaný a rozumný
Aplikovaný a rozumný	Pravý a bláznivý
Aplikovaný a bláznivý	Aplikovaný a bláznivý

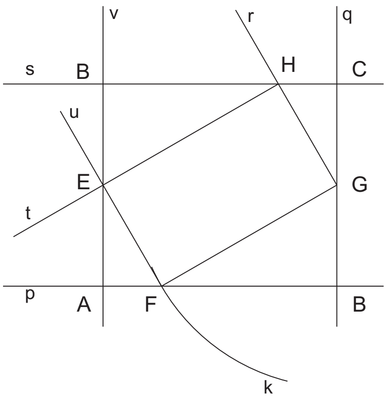
Tabuľka 1: Nápad Lukáša Ivana, ktorý veľmi sprehľadňuje riešenie



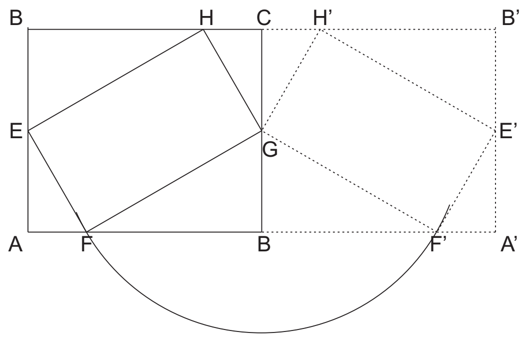
Obrázok 8: konštrukcia po 9. bode



Obrázok 9: konštrukcia po 12. bode



Obrázok 10: konštrukcia po 16. bode



Obrázok 11: druhé riešenie v polrovine BCF'

- Bob: "Dorothy je bláznivý matematik." Ako vidíme, Bobov výrok je pravdivý. To znamená, že môže byť buď pravo-rozumný alebo aplikovano-bláznivý druh matematika. Už o ňom vieme, že je rozumný, čiže musí byť aj pravý matematik.
- Charlie: "Bob je aplikovaný matematik." Tento výrok je zjavné klamstvo. Keďže o Charliem už vieme, že je bláznivý matematik, musí byť aj pravý, aby jeho výrok mohol byť nepravdivý.
- Alice: "Charlie je pravý matematik." Alice vo svojom výroku hovorí pravdu. Vieme o nej, že je aplikovaným matematikom, čiže musí byť aj bláznivý, aby jej výrok mohla byť pravda.

Bez hocijakého skúšania sme prišli k riešeniu, čiže úloha má určite práve jedno riešenie.

Odpoveď: Alice je *aplikovaná* a *bláznivá*, Bob je *pravý* a *rozumný*. Charlie a Dorothy sú obaja *praví* a *bláznivi* matematici.

Komentár: Príklad bol, súdiac podľa vašich riešení, jeden z ťažších. Najdôležitejšie boli dve veci – správne pochopiť zadanie a potom sa nestratiť vo svojich úvahách. Na splnenie druhého kroku sa naozaj veľmi oplatí čo najviac používať tabuľky, grafy alebo iné znázornenia myšlienok, ktoré sa často dajú pochopiť ľahšie než slová. Celkovo ste boli šikovní, nech sa vám všetkým darí aspoň tak aj v ďalších sériách :)

Prémia (opravoval Maják):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Matilda prejde za deň (24 hodín) 300 km. Odíde z našej základne o 0:00. Ja vyrazím o 8:00 a budem sa ju snažiť dohnať. Keď ju dobehnem, otočím sa a vrátim sa späť. Mala by som sa vrátiť o 18:00. Koľko kilometrov by som potom prešla za celý deň (24 hodín), keby som išla stále tou istou rýchlosťou?

Riešenie: Vieme, že dievča zo zadania, nazvyme ju Sofia, Matildu dobehla v polovici svojej cesty, pretože druhú polovicu sa vracala späť. Sofia išla od 8-mej do 18-tej, teda 10 hodín, z toho polovica je 5 hodín. Po piatich hodinách (od 8-mej) Sofia dobehla Matildu, teda dobehla ju presne o 13:00. Keďže Matilda prejde za 24 hodín 300 km, tak za hodinu prejde 12,5 km. Preto za 13 hodín od polnoci stihla prejsť $13 \cdot 12,5 = 162,5$ km. Túto istú trasu prešla Sofia za 5 hodín (je to len smer „tam"), a teda za hodinu vie prejsť $162,5/5 = 32,5$ km. V zadaní sa pýtame, koľko kilometrov prejde za 24 hodín. Je to $24 \cdot 32,5 = 780$ km.

Odpoveď: Sofia (dievča zo zadania) by za deň prešla 780 kilometrov.

Komentár: Tento príklad vám vôbec nerobil problémy, len niektorí z vás nesprávne dešifrovali zadanie. Za to mohli stratiť do dvoch bodov. Zvyšné body sa dali stratiť na iných rôznych chybách a na nedostatočnom popise riešenia. Ak ste napísali aspoň správne dešifrované zadanie, tak vás jeden bodík neminul.