Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2008/2009

Príklad č. 1 (opravovala Danka):

Označme si naše kúzelné číslo $\overline{ABC}$. Hodnota kúzelného čísla vzrastie o 9, keď sa zamenia číslice na mieste jednotiek a desiatok. Z tejto vety vieme, že po zámene číslic musíme dostať väčšie číslo ako kúzelné ($\overline{ABC}+9=\overline{ACB}$). Aby sme dostali väčšie číslo, musí byť číslica na mieste desiatok v kúzelnom čísle menšia ako číslica na mieste jednotiek ($B<C$). A keďže číslo $\overline{ACB}$ je o 9 väčšie ako číslo $\overline{ABC}$, číslice B a C musia byť dvojicou za sebou idúcich číslic ($B+1=C$).

Rovnako to platí aj pre dvojicu $\overline{ABC}$ a $\overline{ABC}$. Kúzelné číslo vzrastie o 90, keď sa zamenia číslice na mieste stoviek a desiatok ($\overline{ABC}+90=\overline{BAC}$). Aby sme dostali väčšie číslo, musí byť číslica na mieste stoviek v kúzelnom čísle menšia ako číslica na mieste desiatok ($A<B$). A keďže číslo $\overline{BAC}$ je o 90 väčšie ako číslo $\overline{ABC}$, číslice A a B musia byť dvojicou za sebou idúcich číslic ($A+1=B$).

Teraz si vieme vypísať všetky kúzelné čísla: $123, 234, 345, 456, 567, 678, 789$. Číslo, ktoré má $A=0$, 012, nie je trojciferné, preto nepatrí medzi kúzelné čísla. Zistili sme, že existuje 7 rôznych kúzelných čísel. Stačí už len zistiť, o koľko sa zmení kúzelné číslo, keď sa zamenia jeho číslice na mieste stoviek a jednotiek($\overline{CBA}-\overline{ABC}=$?):

$321-123=198$, $432-234=198$, $543-345=198$, $654-456=198$, $765-567=198$, $876-678=198$, $987-789=198$

Odpoveď: Kúzelné číslo sa po zamenení číslic na mieste stoviek a jednotiek zväčší o 198.

Komentár: Väčšina z vás prišla na správne riešenie. Často ste však nevysvetlili všetko, čo bolo treba a tam išli bodíky dolu. Mnohí z vás len skonštatovali, že číslice sú za sebou idúce, ale nevysvetlili, prečo je to tak. Niekoľkým sa zas pritrafila chyba nepozornosti a dostali ste zlý výsledok. Nezabúdajte si preto riešenia pred odovzdaním skontrolovať. Prajem vám pekné prázdniny a veľa úspechov v letnej sérii...

Príklad č. 2 (opravovali Tinka a Uľka):

K dispozícii máme 10 kartičiek. Na vytvorenie troch trojciferných čísel potrebujeme 9 kartičiek. Preto najprv zistíme, ktorú kartičku Maťko nepoužil. Súčet cifier na kartičkách je spolu 45. Súčet cifier na použitých kartičkách je $13+14+15=42$. Rozdiel týchto súčtov predstavuje kartičku, ktorú Maťko nepoužil, teda: $45-42=3$.

Teraz si uvedomíme, že ak potrebujeme, aby bol súčet čo najmenší, musíme dať na miesta stoviek čo najmenšie cifry a na miesta jednotiek čo najväčšie cifry. Na miestach stoviek by sa nám teda objavili cifry $0, 1, 2$, avšak žiadne trojciferné číslo sa nulou nezačína. Preto musia byť na mieste stoviek cifry $1, 2, 4$ (trojku sme už vyradili). Na miestach jednotiek dosadíme cifry $7, 8$ a 9. Ostali nám kartičky $0, 5, 6$, ktoré sa budú nachádzať na miestach desiatok.

Spravme si súpis:

- stovky: $1, 2, 4$
- desiatky: $0, 5, 6$
- jednotky: $7, 8, 9$

Všimneme si, že 0 je oproti päťke a šestke o dosť menšie číslo. Keby sme ju pripočítali k jednotke alebo dvojke, tak by nám ani priradenie najväčšej cifry na mieste jednotiek, teda deviatky, nestačilo na najnižší ciferný súčet 13 (z $13, 14, 15$). Takže nám automaticky ostáva spojiť ju so štvorkou. Spolu dávajú súčet 4, preto k nim pridáme deviatku, teda nám vznikne trojciferné číslo 409, ktorého ciferný súčet je 13.

Ostali nám cifry:

- stovky: $1, 2$
- desiatky: $5, 6$
- jednotky: $7, 8$

Možností kombinácií, aby sa nám zachovali rády stoviek, desiatok a jednotiek a zároveň, aby nám vznikli ciferné súčty 14 a 15 je viac. Ak k jednotke pridáme päťku, dostaneme súčet 6. A teda $14-6=8$, vyjde nám číslo 158 alebo $15-6=9$, to však nie je riešenie, lebo kartička 9 je už použitá. Ak k jednotke pridáme šestku, dostaneme súčet 7. A teda $14-7=7$. Vyjde nám číslo 167 alebo $15-7=8$, kde nám vyjde číslo 168. K týmto trom číslam vytvoríme dvojicu zo zostávajúcich cifier. Bude to vyzerať takto: 158 a 267, 167 a 258, 168 a 257.

Nakoniec už len spočítame nájdené trojice čísel:

$$409+158+267=834 \qquad 409+167+258=834 \qquad 409+168+257=834$$

Vyšli nám všetky tri súčty rovnaké. Je to spôsobené tým, že sme zachovali rády jednotiek, desiatok a stoviek. Konkrétne kombinácie sme robili na overenie existencie takejto možnosti, teda či skutočne môžeme takéto čísla vytvoriť a sčítať (často sa stáva, že stratíte body, keď vyrátate výsledok, ale zabudnete si overiť, či ešte platia predpoklady, s ktorými ste pracovali).

Odpoveď: Maťko mohol dostať najmenší súčet čísel 834.

Komentár: Väčšina z vás zvládla tento príklad veľmi pekne. Občas sa ale objavovali chyby a nedostatky v postupe. Body ste dostávali za vylúčenie kartičky s 3kou, za zaradenie čísel do rádov (nula do desiatok,...) a odôvodnenie správneho výsledku. Držíme vám palce, aby ste sa dostali na sústredko.

Príklad č. 3 (opravovali Maják a Jančo):

A (okrem Gamče): Najprv si zistíme, aké súčty cifier vieme v zadanom čísle vyrobiť, ak najviac môže byť $5 + 5 = 10$:

$$\begin{aligned}
1 &= 0+1\\
2 &= 1+1, 2+0\\
3 &= 2+1, 3+0\\
4 &= 2+2, 3+1, 4+0\\
5 &= 3+2, 4+1, 5+0\\
6 &= 3+3, 4+2, 5+1\\
7 &= 4+3, 5+2\\
8 &= 4+4, 5+3\\
9 &= 4+5\\
10 &= 5+5
\end{aligned}$$

Z každej cifry okrem 0 máme v zadanom čísle k dispozícií dva kusy. Avšak, z týchto dvoch kusov môžeme použiť do finálneho čísla len jeden. Prečo? Pretože ak by sme použili obe, tak musia mať rovnako veľký pár do sčítania, aby boli súčty rovnaké.

To sa ale nedá dosiahnuť, pretože buď si budú párom navzájom, čo ale nevedie k riešeniu, alebo budú mať ako pár menšiu/väčšiu cifru, ale to tiež naraz nejde, kvôli usporiadaniu cifier v zadanom čísle (prvá polovica cifier je zoradená zostupne, druhá polovica vzostupne. Akonáhle si vyberieme nejakú väčšiu cifru a do páru k nej nejakú menšiu cifru, druhá dvojička rovnakých cifier sa nemôže spojiť do páru, pretože sa nenachádza ani „zvnútra“, ani „zvonka“ prvého páru).

Keďže najviac použitých cifier je tým pádom 6, tak nám stačí nájsť jedno také riešenie so štyrmi škrtnutými ciframi, a vieme, že na menej škrtnutí to už nemôže ísť. Také číslo naozaj existuje, je to napríklad 543210 (Súčty sú 5).
Odpoveď: Musíme škrtnúť najmenej 5 cifier.

B (pre Gamču): Cifra na mieste desiatok môže byť iba $1, 2$ alebo 3, aby bolo 3-krát väčšie číslo na mieste tisícok tiež cifrou ($3, 6$ alebo 9). Nulu neberieme do úvahy, lebo $0 \cdot 3 = 0$ a dvakrát tú istú cifru v zadaní nemáme. Cifra na mieste jednotiek môže byť od 0 do 6 (7 a viac nemôže byť, lebo $7 + 3$ je 10 a to už nie je cifra), cifra na mieste stoviek môže byť od 3 do 9.

a) Ak by bola cifra na mieste desiatok 1, na mieste tisícok by sme museli mať 3. Ale zároveň by na mieste jednotiek musela ostať 0 a cifra na mieste stoviek by musela byť $0 + 3 = 3$, teda by tam bola 2-krát trojka (číslo by vyzeralo takto: 9876543310, čo nemôže nastať)

b) Ak bude cifra na mieste desiatok 2, na mieste tisícok musí byť 6. Sú len 2 možnosti pre cifru na mieste jednotiek (0, 1), a preto, ak vyškrtáme len nežiadúce cifry, existujú len dve možnosti:
9876320, kde sme škrtli 3 cifry (5,4,1)
9876421, kde sme škrtli 3 cifry (5,3,0)

c) Ak bude cifra na mieste desiatok 3, na mieste tisícok musí byť 9. Opäť sú len 2 možnosti pre jednotky (tentoraz 1, 2) a teda existujú len dve možnosti výsledných čísel:
9431, kde sme škrtli 6 cifier (8,7,6,5,2,0)
9532, kde sme škrtli 6 cifier (8,7,6,4,1,0)

Hľadali sme možnosti s najmenším počtom vyškrtnutých číslic a to je 3.
Odpoveď: Musíme vyškrtnúť minimálne 3 cifry, riešenia sú: 9876320 a 9876421.
Komentár: V A variante veľká časť z vás prišla na správne riešenie, no nedostatočne zdôvodnila to, že našli najlepšie riešenie. Keďže ste mali nájsť minimálny počet škrtnutí, tak treba aj ukázať, že je naozaj minimálny. V B-čku sa žiadne výraznejšie chyby neobjavili, väčšinou len slabšie popisy. Za samotnú odpoveď ste mohli získať dva bodíky. Zvyšok bol za postup, každému podľa jeho správnosti.

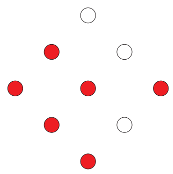
Príklad č. 4 (opravovali Monča a Ľuba):

Keďže Janko a Marienka stáli na začiatku v protiľahlých bodoch kruhovej dráhy, po ich prvé stretnutie spolu prebehli polovičku bežeckej dráhy. K ďalšiemu stretnutiu spolu museli prebehnúť celú bežeckú dráhu. Ich rýchlosť behu sa nemenila a dĺžka trate, ktorú spolu prebehli od prvého stretnutia po druhé, je dvakrát taká, ako dĺžka trate, ktorú spolu prebehli po prvé stretnutie. To znamená, že aj každý z nich od prvého po druhé stretnutie prebehol dvakrát dlhšiu dráhu, ako od začiatku po prvé stretnutie.

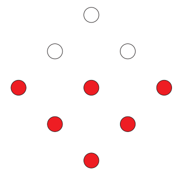
Vieme, že Janko po prvé stretnutie prebehol 100 metrov, po druhé teda musel prebehnúť dvakrát toľko, čo je 200 metrov. Zo zadania tiež vieme, že Marienka od prvého po druhé stretnutie prebehla 150 metrov. Spolu teda od prvého po druhé stretnutie prebehli $200 + 150 = 350$ metrov.
Odpoveď: Dĺžka bežeckej dráhy je 350 metrov.
Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký, niekedy ste však iba skúšali a len tak ste si povedali výsledok, čo je škoda. V mnohých prípadoch ste však napísali všetko, čo sme potrebovali, a na to, aby ste dostali desať bodov, nebolo treba veľa vecí. Celkovo ste príklad vyriešili veľmi pekne:).

Príklad č. 5 (opravovali Jankaa a Gubika):

Zo zadania vieme, že vždy spadla minimálne jedna kužeľka, maximálne tri (slovo „kužeľka“ nie je spisovné, ale snáď nám prepáčite, že sa nám viac páči). Z toho vyplýva, že po situácii so všetkými kužeľkami stojacimi (ktorá nie je na žiadnom obrázku) môžu nastať len situácie, kde stojí 8, 7, 6 kuželiek. Zo zobrazených situácií vyhovujú len situácia 1 a 3 (v každej sú spadnuté tri kužeľky) (obrázky 1 a 2). Musíme si uvedomiť, že každá kužeľka, ktorá už raz spadla (prázdny krúžok), sa nemôže



Obrázok 1: Situácia 1

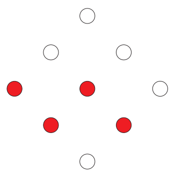


Obrázok 2: Situácia 3

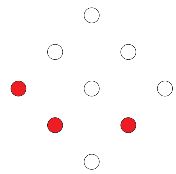
v nasledujúcej situácii objaviť stojaca (ako krúžok plný), lebo vieme, že kužeľky sa pri hre nemôžu „reinkarnovať“. Poďme si teda vypísať pre každú situáciu, ktoré situácie by po nej mohli nasledovať.

- Situácia 1: po nej môžu nasledovať sitácie 2 a 5.
- Situácia 2: po nej môže nasledovať situácia 5.
- Situácia 3: po nej môžu nasledovať sitácie 2, 4, 5, 6 a 7.
- Situácia 4: po nej môžu nasledovať sitácie 5, 6 a 7.
- Situácia 5: po nej nebude nasledovať žiadna situácia, len tá „konečná“, v ktorej budú spadnuté všetky kužeľky.
- Situácia 6: po nej môže nasledovať sitácia 7.
- Situácia 7: po nej nebude nasledovať žiadna situácia, len tá „konečná“, v ktorej budú spadnuté všetky kužeľky.

Prečo po situácii 6 môže nasledovať situácia 7?



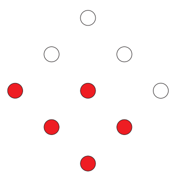
Obrázok 3: Situácia 6



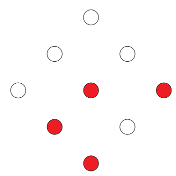
Obrázok 4: Situácia 7

Vidíme, že rozdiel medzi situáciou 6 (obrázok 3) a situáciou 7 (obrázok 4) je len v úplne prostrednej kužeľke. Takže po situácii 6 nasledoval hod, ktorým bola zhodená len jedna kužeľka, práve tá prostredná. Ako sme si už povedali, po situácii 7, by ďalej nasledovala už len „konečná“ situácia, so všetkými kužeľkami spadnutými.

A prečo nemôže po situácii 4 nasledovať napríklad situácia 2?



Obrázok 5: Situácia 4



Obrázok 6: Situácia 2

Nakoľko v situácii 4 (obrázok 5), v treťom riadku je posledná kužeľka už spadnutá a na situácii 2 (obrázok 6) je opäť postavená, vidíme, že tieto situácie nemôžu nasledovať po sebe. Aj napriek tomu, že na situácii 4 je päť kuželiek a na situácii 2 len štyri kužeľky, tieto situácie nemôžu obidve nastať v jednej hre.

Obdobne sme vyhodnotili navzájom každú dvojicu situácii.

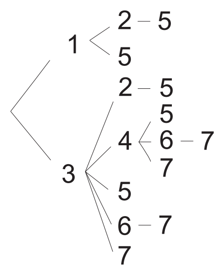
Teraz už vieme, ktoré situácie môžu nasledovať za sebou, že po „začiatočnej“ situácii nasleduje vždy situácia 1 alebo 3, a „konečnej“ situácii tesne predchádza situácia 5 alebo 7.

Vypíšeme si teda všetky hry, ktoré obsahovali iba situácie uvedené v zadaní. Postup je jednoduchý: napíšeme si čísla počiatočných situácií 1 a 3. Zo situácie 1 sa vieme dostať do situácií 2 a 5, preto si situáciu 1 „rozvetvíme“ – pridáme čísla 2 a 5 a spojíme ich s číslom 1. Rozvetvíme si takto aj všetky ostatné situácie, až kým sa nedostaneme ku konečným situáciám 5 a 7, ktoré sa už nedajú rozvetviť. Získame tak nákres (tzv. strom, na obrázku 7), v ktorom názorne vidíme všetky možné hry zložené z našich situácií.

Odpoveď: Kužeľky mohli byť zhodené deviatimi spôsobmi (obrázky 8 až 16).

Komentár: Najdôležitejšie pre nás bolo, aby ste mali vypísané všetky možnosti, odpoveď a zhodnotené, aké situácie nasledovali po „začiatočnom“ a pred „konečným“ stavom. Vtedy ste dostali 10 bodov. Ak vám chýbala len nejaká tá drobnôstka, dostali ste deväť bodov. Za riešenie bez postupu a bez odpovede ste mohli dostať 5 bodov. Takisto sme vám 1-3 bodíky strhávali za chýbajúce možnosti, alebo možnosti navyše. Ale príklad pre vás nebol zložitý, veľa z vás ho malo dobre. Len nabudúce si dajte väčší pozor pri vypisovaní možností. A na postup nezabúdajte!!!

Príklad č. 6 (opravovali Kozzy a Peťo):



Obrázok 7: Rozvetvenie situácií

Počet nábojov, ktoré si pýtala Leona sa môže končiť na hociktorú cifru ($0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, alebo 9). Pre každú z týchto cifier si nájdeme najmenšie číslo, ktoré sa na tú cifru končí a ktoré sa dá poskladať z 5 a 8 kusových balíčkov (tabuľka 1). Tieto

cifra	najmenšie číslo	
0	10	$2 \cdot 5$
1	21	$2 \cdot 8 + 5$
2	32	$4 \cdot 8$
3	13	$5 + 8$
4	24	$3 \cdot 8$
5	5	5
6	16	$2 \cdot 8$
7	37	$4 \cdot 8 + 5$
8	8	8
9	29	$3 \cdot 8 + 5$

Tabuľka 1: Najmenšie čísla

čísla tvoria pre danú cifru istú hranicu, pretože každé ďalšie väčšie číslo končiace sa na danú cifru sa už bude dať poskladať z 5 a 8 kusových balíčkov. Pridaním ďalších dvoch 5 kusových balíčkov (pripočítaním 10) totiž dostaneme ďalšie číslo, ktoré sa končí na tú istú cifru a tiež sa dá zložiť z 5 a 8 kusových balíčkov. Napríklad pre cifru 7: najmenšie číslo, ktoré sa dá poskladať je 37. Každé ďalšie číslo končiace sa na 7 sa už dá poskladať: $47 = 37 + 2 \cdot 5 = 4 \cdot 8 + 3 \cdot 5$ atď.

Od každého z tých čísel si viem teraz vytvoriť najväčšie číslo, ktoré sa *nedá* poskladať a končí sa na tú istú cifru a to odpočítaním 10. A sú to čísla $0, 11, 22, 3, 14, -5, 6, 27, -2, 19$. Teraz platí: Každé väčšie číslo, ktoré sa bude končiť na rovnakú cifru sa bude dať poskladať (-5 a -2 sú špeciálne prípady; vravia nám vlastne, že každé číslo končiace na 5 alebo na 8 sa dá poskladať).

Zo zadania vieme, že Leona si vypýtala taký počet nábojov, ktorý sa nedá poskladať, ale hociktorý väčší počet sa už poskladať dá; teda je to najväčší počet nábojov, ktorý sa nedá poskladať. Treba si uvedomiť, že to bude jedno z našich desiatich čísel, pretože my tam máme presne také čísla, iba rozdelené na kategórie podľa poslednej cifry. A hľadané číslo si tiež môžeme zadeliť podľa jeho poslednej cifry do jednej z kategórií (a tam bude najväčšie číslo s tou cifrou na konci, ktoré sa nedá poskladať).

My hľadáme najväčší počet nábojov, ktorý sa nedá poskladať. Z čísel $0, 11, 22, 3, 14, -5, 6, 27, -2, 19$ musím teda vybrať to najväčšie. Nech k nemu potom pridám hocijaký počet nábojov, vznikne číslo s nejakou cifrou na konci, ktoré je ale väčšie než číslo z našich desiatich z tej kategórie, čiže sa dá poskladať. Najväčšie je číslo 27, čiže Leona si vypýtala 27 nábojov.

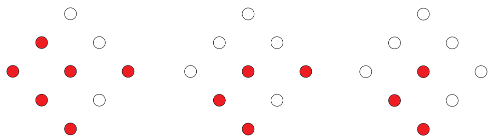
Odpoveď: Leona si v obchode pýtala 27 nábojov.

Komentár: : Toto je spôsob, ktorým väčšina z vás riešila tento príklad, čiže ste ho mali zväčša správne. Najčastejšie sme vám strhávali body za to, že ste nezdôvodnili, prečo sa všetky väčšie čísla ako 27 dajú poskladať.

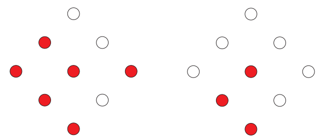
Príklad č. 7 (opravovala Zuzka):

Najskôr si musíme uvedomiť, že kráľ vyplatí Jankovi najmenej peňazí vtedy, keď sa $\frac{3}{10}$ z veľkej kopy budú rovnať $\frac{7}{10}$ z malej kopy (sú to časti, ktoré si Janko môže maximálne odniesť).

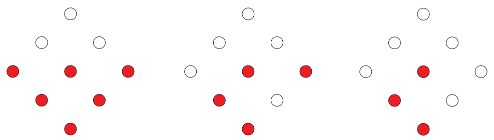
No je to tak určite? Nech $\frac{3}{10} \cdot v = \frac{7}{10} \cdot m$ (v je počet dukátov vo veľkej kope, m je počet dukátov v malej kope). Jankovi je jedno, z ktorej kopy si zoberie svoj podiel. Keď z malej kopy prehodíme niekoľko dukátov (ich počet si označíme a) na veľkú, tak si Janko môže zobrať buď $\frac{7}{10} \cdot (m - a)$, alebo $\frac{3}{10} \cdot (v + a)$, samozrejme si vyberie tú druhú možnosť. No Kráľ takto príde o viac peňazí. Keď z veľkej kopy prehodíme niekoľko dukátov (ich počet si označíme a) na malú, tak Janko si môže zobrať buď $\frac{7}{10} \cdot (m + a)$, alebo $\frac{3}{10} \cdot (v - a)$, samozrejme si vyberie prvú možnosť. Aj v tomto prípade príde kráľ o viac peňazí.



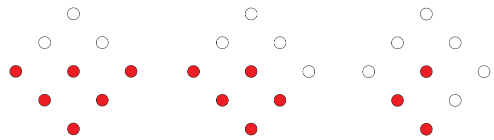
Obrázok 8: Hra 1 – Situácie 1-2-5



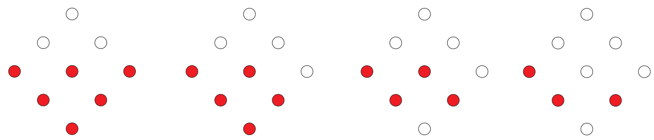
Obrázok 9: Hra 2 – Situácie 1-5



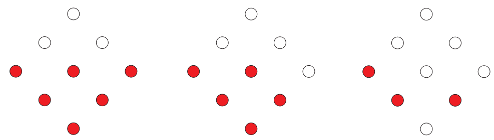
Obrázok 10: Hra 3 – Situácie 3-2-5



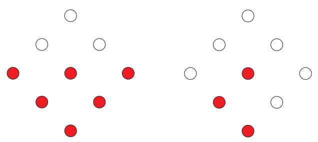
Obrázok 11: Hra 4 – Situácie 3-4-5



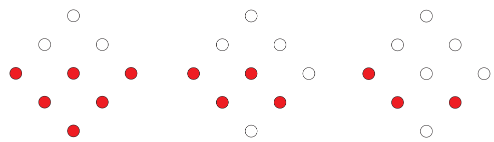
Obrázok 12: Hra 5 – Situácie 3-4-6-7



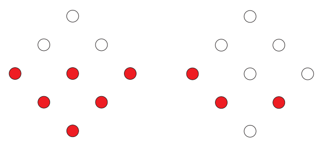
Obrázok 13: Hra 6 – Situácie 3-4-7



Obrázok 14: Hra 7 – Situácie 3-5



Obrázok 15: Hra 8 – Situácie 3-6-7



Obrázok 16: Hra 9 – Situácie 3-7

Takže už vieme, že kráľovi sa oplatí rozdeliť kopy tak, aby $\frac{3}{10} \cdot v = \frac{7}{10} \cdot m$. No koľko dukátov bude na jednotlivých kopách? Ešte vieme, že $v + m = 113$ (celkový počet dukátov). Riešme teda sústavu dvoch rovníc.

$$\begin{aligned} v + m &= 113 \\ v &= 113 - m \end{aligned}$$

Dosadíme do nasledujúcej rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} \cdot v &= \frac{7}{10} \cdot m \\ \frac{3}{10} \cdot (113 - m) &= \frac{7}{10} \cdot m \\ 3 \cdot (113 - m) &= 7m \\ 339 - 3m &= 7m \\ 339 &= 10m \\ 33,9 &= m \end{aligned}$$

Dopočítame v.

$$\begin{aligned} v &= 113 - 33,9 \\ v &= 79,1 \end{aligned}$$

No a máme malý problém. Ako dáme na kopu 33,9 dukátov? Ideálne rozdelenie, kde by platilo $\frac{3}{10} \cdot v = \frac{7}{10} \cdot m$ sa nedá dosiahnuť. Posnažíme sa teda o čo najlepšie. Na malú kopu môžeme dať 33, alebo 34 dukátov.

Ak dáme na malú kopu 33 dukátov, tak na veľkej bude 80. Janko si bude môcť odniesť: Z malej kopy: $\frac{7}{10} \cdot m = \frac{7}{10} \cdot 33 = 23,1$ dukátov. No keďže sa dukáty nedajú deliť, Janko si môže zobrať len 23 dukátov. (Pozor, nie 24! V zadaní je napísané, že si môže odniesť *najviac* $\frac{7}{10}$ z malej kopy) Alebo z veľkej kopy: $\frac{3}{10} \cdot v = \frac{3}{10} \cdot 80 = 24$ Kráľ takto príde maximálne o 24 dukátov.

Ak dáme na malú kopu 34 dukátov, tak na veľkej bude 79. Janko si bude môcť odniesť: Z malej kopy: $\frac{7}{10} \cdot m = \frac{3}{10} \cdot 34 = 23,8$ dukátov. Keďže sa dukáty nedajú deliť, Janko si môže zobrať len 23 dukátov. (Pozor, nie 24! V zadaní je napísané, že si môže odniesť *najviac* $\frac{7}{10}$ z malej kopy) Alebo z veľkej kopy: $\frac{3}{10} \cdot v = \frac{3}{10} \cdot 79 = 23,7$ dukátov. No keďže sa dukáty nedajú deliť, Janko si môže zobrať len 23 dukátov (v zadaní je napísané, že si môže odniesť *najviac* $\frac{3}{10}$ z veľkej kopy).

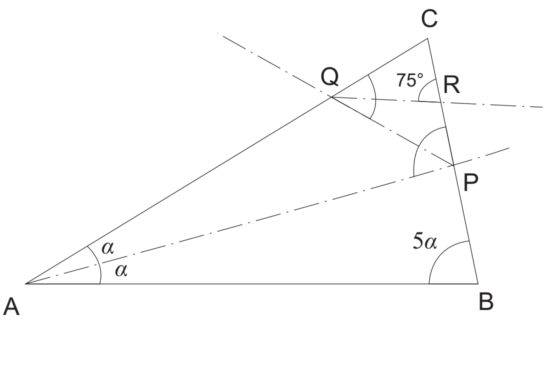
Kráľ takto príde maximálne o 23 dukátov. No a práve toto rozdelenie je preňho najvýhodnejšie.

Odpoveď: Na menšiu kopu treba dať 34 a na väčšiu 79 dukátov.

Komentár: Prísť na základnú myšlienku sa podarilo hádam každému. No horšie to bolo s doriešením celého príkladu. Mnohí z vás si neuvedomili, že sa dukáty nedajú deliť na desatiny. No a ďalšou častou chybou bolo, že aj keď ste si to uvedomili, tak ste neceločíselný počet dukátov automaticky zaokrúhlili. Napríklad, keď ste vypočítali, že na malej kope má byť 33,9 dukátov, tak ste to zaokrúhlili na 34 a nezamysleli ste sa nad tým, čo by sa stalo, keby bolo na malej kope len 33 dukátov. Alebo nakoniec vám vyšlo, že si Janko odnesie 23,8 dukátov, to ste pokojne zaokrúhlili na 24 aj keď podľa zadania si nemohol odniesť viac ako 23,8 dukátov.

Príklad č. 8 (opravovali Niwka a Betka):

A (okrem Gamče): Majme trojuholník ABC. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode P, os uhla APC pretína stranu AC



Obrázok 17: Príklad 8A: Trojuholník ABC

v bode Q a os uhla PQC pretína stranu BC v bode R. Uhol QRC má 75° a pomer vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B trojuholníka ABC je 2 : 5. Toto všetko sme vedeli zo zadania a je to zaznačené na obrázku 17. Označme si $\sphericalangle BAC$ ako 2α a uhol $\sphericalangle ABC$ ako 5α (podľa pomeru, ktorý poznáme). Ďalej vieme, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°, taktiež, že súčet susedných uhlov je 180° a ešte, že os uhla rozdeľuje daný uhol na polovicu. Teraz si môžeme vypočítať jednotlivé uhly. Vieme, že

$$|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle APB| = 180^\circ$$

(sú susedné uhly) a taktiež, že

$$\alpha + 5\alpha + |\sphericalangle APB| = 180^\circ$$

(vnútorné uhly v trojuholníku ABP). Z týchto rovníc si vieme vyjadriť

$$|\sphericalangle APC| = 180^\circ - |\sphericalangle APB|$$

kde

$$|\sphericalangle APB| = 180^\circ - 6\alpha \Rightarrow |\sphericalangle APC| = 180^\circ - (180^\circ - 6\alpha) = 6\alpha$$

Uhol $\sphericalangle APC$ má teda veľkosť 6α (aj preto, že je to vonkajší uhol trojuholníka ABP). Ďalej vieme, že je rozdelený osou na dva rovnaké uhly, a teda vieme

$$|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle QPC| = \frac{|\sphericalangle APC|}{2} = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha$$

Rovnako nájdeme aj veľkosti uhlov $\sphericalangle PQR$ a $\sphericalangle RQC$, pretože $\sphericalangle PQC$ je taktiež rozdelený osou na dva rovnako veľké uhly. Vieme, že

$$|\sphericalangle AQP| + |\sphericalangle PQC| = 180^\circ$$

(susedné uhly) a taktiež, že

$$\alpha + 3\alpha + |\sphericalangle AQP| = 180^\circ$$

(vnútorné uhly v trojuholníku APQ). Tieto rovnice vieme upraviť nasledovne:

$$|\sphericalangle PQC| = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) = 4\alpha$$

Alebo sme mohli opäť veľmi jednoducho zdôvodniť, že $\sphericalangle PQC$ je vonkajší uhol trojuholníka APQ a preto má veľkosť $\alpha + 3\alpha = 4\alpha$. Na základe tejto úpravy vieme ďalej počítať:

$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle RQC| = \frac{|\sphericalangle PQC|}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$$

Poznáme $|\sphericalangle QRC| = 75^\circ$ a taktiež vieme, že $|\sphericalangle QRC| + |\sphericalangle QRP| = 180^\circ$. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle QRP| = 105^\circ$. V trojuholníku QPR je súčet vnútorných uhlov $180^\circ = 2\alpha + 3\alpha + 105^\circ$, z toho zistíme, že $\alpha = 15^\circ$. Teraz už len jednoducho pomocou uhlu α dorátame uhly v trojuholníku ABC nasledovne:

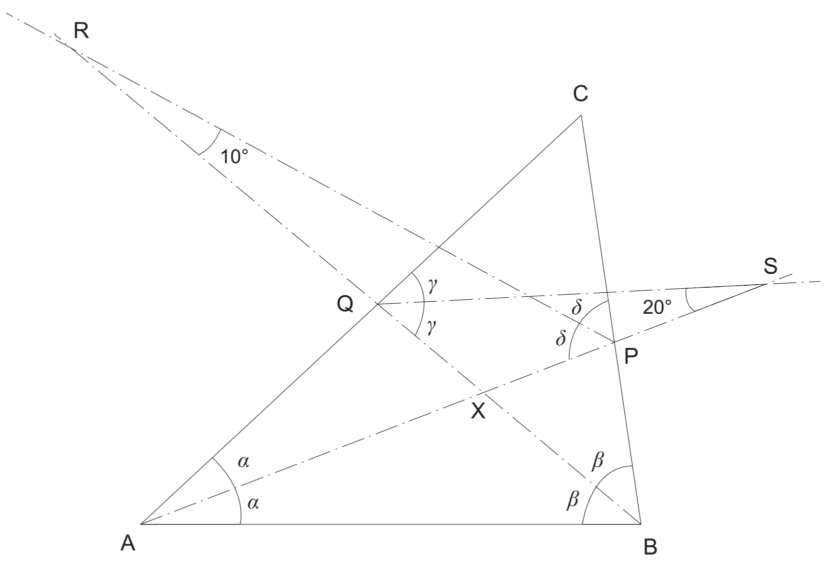
Odpoveď:

$$|\sphericalangle BAC| = 2\alpha = 30^\circ$$

$$|\sphericalangle ABC| = 5\alpha = 75^\circ$$

$$|\sphericalangle BCA| = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$$

B (pre Gamču): Majme trojuholník ABC. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode P a os uhla ABC pretína stranu AC v bode Q. Os uhla APC pretína priamku BQ v bode R a os uhla BQC pretína priamku AP v bode S. Body R a S ležia mimo trojuholníka ABC. Ďalej vieme, že uhol PSQ má veľkosť 20° a uhol QRP má veľkosť 10°. To sme mali v zadaní, zakreslíme si to do obrázka (obrázok 18).



Obrázok 18: Príklad 8B: Trojuholník ABC

Označíme si veľkosti uhlov nasledovne:

$$\alpha = |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle PAB|$$
$$\beta = |\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle CBQ|$$
$$\gamma = |\sphericalangle BQS| = |\sphericalangle SQC|$$
$$\delta = |\sphericalangle APR| = |\sphericalangle RPC|$$

Priesečník BQ a AP si označíme ako X. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka ABX: $|\sphericalangle AXB| + \alpha + \beta = 180°$, kde si vyjadríme $|\sphericalangle AXB| = 180° - (\alpha + \beta)$. Ďalej vieme, že $|\sphericalangle BXP| + |\sphericalangle AXB| = 180°$ (susedné uhly). Z toho vyplýva

$$|\sphericalangle BXP| = 180° - (180° - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta$$

Alebo jednoducho: uhol $\sphericalangle BXP$ je vonkajší uhol v trojuholníku ABX a teda má veľkosť $\alpha + \beta$.

Využitím tohto vzťahu (veľkosť vonkajšieho uhla pri nejakom vrchole v trojuholníku je súčet veľkostí vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch) si zjednodušíme prácne počítanie uhlov. Vyskúšajme si to na trojuholníkoch RXP a QXS.

$\sphericalangle BXP$ je vonkajším uhlom pri vrchole X v RXP, čiže jeho veľkosť je:

$$|\sphericalangle BXP| = \delta + 10°$$

$\sphericalangle BXP$ je vonkajším uhlom pri vrchole X v QXS, čiže jeho veľkosť je:

$$|\sphericalangle BXP| = \gamma + 20°$$

S využitím zisteného $|\sphericalangle BXP| = \alpha + \beta$ dostávame:

$$|\sphericalangle BXP| = |\sphericalangle AXQ| = \delta + 10° = \gamma + 20° = \alpha + \beta$$

Vyjadrením vonkajších uhlov v trojuholníkoch ABP a ABQ sa dostaneme k iným zaujímavým vzťahom.

Uhol veľkosti 2γ je vonkajším uhlom pri vrchole Q v ABQ, čiže jeho veľkosť je:

$$2\gamma = \beta + 2\alpha$$
$$\gamma = \frac{\beta}{2} + \alpha$$

Uhol veľkosti 2δ je vonkajším uhlom pri vrchole P v ABP, čiže jeho veľkosť je:

$$2\delta = \alpha + 2\beta$$
$$\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

Teraz dopočítame α a β. Na základe rovníc:

$$\gamma = \alpha + \beta - 20° \qquad \gamma = \frac{\beta}{2} + \alpha$$

ďalej počítame

$$\alpha + \beta - 20° = \frac{\beta}{2} + \alpha \Rightarrow \beta = 40°$$

Podobne dopočítame α:

$$\delta = \alpha + \beta - 10° \qquad \delta = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

$$\alpha + \beta - 10° = \frac{\alpha}{2} + \beta \Rightarrow \alpha = 20°$$

Teraz už len jednoducho dopočítame uhly v trojuholníku ABC:

Odpoveď:

$$|\sphericalangle BAC| = 2\alpha = 40°$$
$$|\sphericalangle ABC| = 2\beta = 80°$$
$$|\sphericalangle BCA| = 180° - (40° + 80°) = 60°$$

Komentár: Až na zopár riešení ste tento príklad zvládli, hoci treba povedať, že vás nebolo veľa. Chyby, za ktoré sme strhávali body bolo napríklad, ak ste nikde nenapísali, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$, alebo ste len tak bez označenia sčítavali nejaké uhly a my sme museli prácne hľadať na obrázku, čo tým vlastne myslíte. A taktiež sme strhli bod, ak ste nikde nemali napísané, že súčet susedných uhlov je tiež $180°$. Potom boli aj menšie chyby, za ktoré sme však nestrhávali body, ako napríklad zlé označenie uhlu (v obrázku inak ako vo výpočtoch), alebo vrcholové uhly ste nazývali všelijakými menami, ako uhly oproti sebe, opačné uhly... Inak ste to zvládli celkom pekne, nabudúce by sme však ocenili väčšie obrázky, alebo aspoň prehľadnejšie (prípadne farebne odlíšené by boli úplne super). A čo sa týka nesprávnych riešení, hlavnou chybou bol predpoklad, že napríklad os uhla ABC (v trojuholníku ABC, priesečník osi so stranou CA označíme D) rozdeľuje aj uhol ADC na dva rovnako veľké uhly ADC a ADB, čo však nie je pravda.

Príklad č. 9 (opravoval Palo):

Označme si prvočíslo, ktoré je odmocninou z A ako p a prvočíslo, ktoré je odmocninou z B ako q. Upravujme rovnicu zo zadania:

$$\begin{aligned} B &= A + 72 \\ B - A &= 72 \\ q^2 - p^2 &= 72 \\ (q+p) \cdot (q-p) &= 72 \end{aligned}$$

Určite vieme, že $q + p > q - p$ (keďže prvočísla sú vždy prirodzenými číslami). Teda si musíme rozdeliť číslo 72 na dva rôzne činitele tak, aby boli splnené nasledovné podmienky:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 72 \\ q + p &= x \\ q - p &= y \end{aligned}$$

Spočítaním posledných dvoch rovníc dostávame $q = \frac{x+y}{2}$. Číslo 72 vieme ako súčin dvoch prirodzených čísel napísať šiestimi spôsobmi: $72 \cdot 1$, $36 \cdot 2$, $24 \cdot 3$, $18 \cdot 4$, $12 \cdot 6$ a $9 \cdot 8$. Poďme ich rozobrať:

- $x = 72$, $y = 1$. Podľa vyššie uvedeného vzorca má platiť $q = \frac{x+y}{2} = \frac{72+1}{2} = 37.5$, čo určite nie je prvočíslo.
- $x = 36$, $y = 2$. Určite platí $q = \frac{x+y}{2} = \frac{36+2}{2} = 19$, čo je prvočíslo. Ďalej vieme, že $q + p = 36$, čiže $p = 17$, čo je tiež prvočíslo. Umocnením dostávame prvé riešenie: $[A, B] = [289, 361]$.
- $x = 24$, $y = 3$. Platí $q = \frac{x+y}{2} = \frac{24+3}{2} = 13.5$, čo určite nie je prvočíslo.
- $x = 18$, $y = 4$. Platí $q = \frac{x+y}{2} = \frac{18+4}{2} = 11$, čo je prvočíslo. Ďalej vieme, že $q + p = 18$, čiže $p = 7$, čo je tiež prvočíslo. Dostávame druhé riešenie: $[A, B] = [49, 121]$.
- $x = 12$, $y = 6$. Platí $q = \frac{x+y}{2} = \frac{12+6}{2} = 9$, čo nie je prvočíslo.
- $x = 9$, $y = 8$. Platí $q = \frac{x+y}{2} = \frac{9+8}{2} = 8.5$, čo taktiež nie je prvočíslo.

Týmto sme zjavne prešli všetky možnosti, čiže sme žiadne riešenie nemohli zabudnúť.

Odpoveď: Podmienkam zo zadania vyhovujú dve dvojice čísel $[A, B]$: $[49, 121]$ a $[289, 361]$.

Komentár: S príkladom ste sa poväčšine popasovali veľmi dobre, pár bodíkov išlo dole za nedostatočné vysvetlenia. Na tie si vždy dávajte pozor – je lepšie napísať do príkladu viac, ako strácať body za to, keď toho napíšete málo. Napriek tomu som s vami výrazne spokojní, ste šikovní :)

Prémia (opravovali Emil a Spišo):

Prvý krok, ktorý je pri riešení prémie veľmi dôležitý je správne dešifrované zadanie. Tentokrát malo vyzerať nasledovne:

Jedná sa o nový 1-podlažný dom, o ktorom ešte vieme, že:

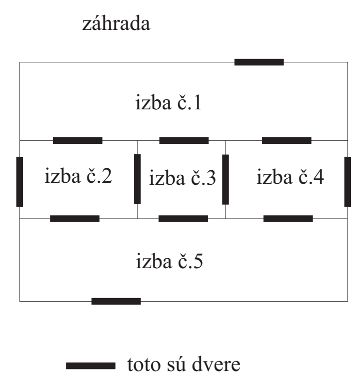
- medzi každými 2 izbami sú maximálne 1 dvere
- z každej izby vedú von na záhradu maximálne jedny dvere
- v dome je celkovo 12 dverí

Koľko najmenej izieb mohlo byť v dome? Skúste nakresliť plán tohto domu.

Našou úlohou je teda zistiť, koľko najmenej izieb musí byť v dome, ak tam je 12 dverí. Ak chceme pre istý počet izieb v dome umiestniť do domu čo najviac dverí, musíme ich umiestniť všade tam, kde je to možné. Podľa zadania ale medzi každými dvoma izbami a takisto medzi jednou z izieb a záhradou môžu byť maximálne jedny dvere. Aby sme však mohli medzi dve izby alebo izbu a záhradu umiestniť dvere, musia tieto dve miestnosti (miestnosťami myslíme izby a záhradu) spolu susediť (mať spoločnú stenu). Pri kreslení plánu domu sa preto musíme snažiť o to, aby každá izba susedila s každou z izieb a takisto aj so záhradou. Ak je to splnené a dom má n izieb (so záhradou teda $n + 1$ miestností), tak dverí v dome bude $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, pretože z každej z $n + 1$ miestností vedie n dverí (do každej inej miestnosti v ideálnom prípade) a každé dvere spájajú dve izby (resp. Keď vynásobíme počet miestností $n + 1$ počtom dverí n, dostaneme celkový počet dverí. Avšak, zarátame pritom každé dvere dvakrát – najprv ako dvere z jednej miestnosti do druhej a potom ako dvere z druhej miestnosti do prvej – preto treba súčin $n \cdot (n + 1)$ ešte vydeliť dvomi). Z toho vyplýva, že ak by aj bolo možné usporiadať 4 izby v dome tak, aby každé dve miestnosti spolu susedili (čo nie je možné), tak by v dome so štyrmi izbami mohlo byť maximálne 10 dverí. Ostáva nám ešte zistiť, či už pri piatich izbách môže byť v dome 12 dverí. Spôsobov, ktorými treba izby usporiadať aby bolo v dome 12 dverí, je viacero. Jeden z nich je na obrázku 19.

Odpoveď: V dome mohlo byť najmenej 5 izieb.

Komentár: Viacerí z vás mali príklad úplne správne. 1 bod sme strhli tým, ktorých vysvetlenie, prečo nemôže mať dom menej ako 5 izieb, nebolo úplne korektné. Ak ste sa ani nepokúsili zdôvodniť, prečo nemôže byť izieb menej ako 5, dostali ste 4 body. Ak mal niekto iba správne vyriešené zadanie, dostal 1 bod. Tí, ktorí k nemu pridali aj nákres domu s 5 izbami a 12 dverami, alebo odpoveď, dostali 2 body. Bolo aj niekoľko takých, ktorí nemali správne vyriešené zadanie. Tým z vás by som odporučil, aby si odpovede na otázky overili z viacerých zdrojov, aby sa opäť nestalo, že stratíte body kvôli zlému zadaniu.



Obrázok 19: Plán domu s 5 izbami