Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2008/2009

Príklad č. 1 (opravoval Maják):

Zadanie hovorí, že v dvoch ohradách (z troch) je spolu 187 koní. Musíme teda preveriť všetky možnosti, ktoré dve ohrady to môžu byť.

1. Prvá a druhá ohrada. V nich je podľa zadania dokopy 13 čried. Ak má 187 koní byť rovnomerne rozdelených do trinástich čried, tak na jednu pripadá približne $187/23 = 8,13$ koňa. V čriede musí byť celý počet koní, a preto táto možnosť nie je správna.
2. Druhá a tretia ohrada. Podľa zadania je v nich dokopy 10 čried. V tomto prípade nám zasa na jednu čriedu pripadne necelý počet koní a teda ani táto možnosť nedáva žiadny výsledok.
3. Prvá a tretia ohrada. V nich je spolu 11 čried. Na jednu čriedu pripadá $187/11 = 17$ koní. Táto možnosť vyhovuje zadaniu, už nám stačí len vyrátať počty koní v jednotlivých ohradách.

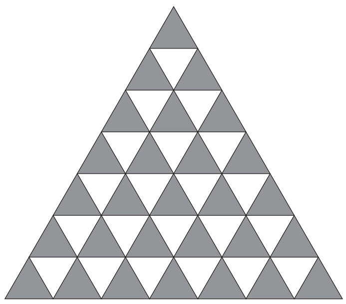
Odpoveď: V prvej ohrade je $7 \cdot 17 = 119$, v druhej $6 \cdot 17 = 102$ a v tretej $4 \cdot 17 = 68$ koní.
Komentár: S príkladom väčšina z vás nemala najmenší problém, potešili ste ma :-). Najčastejšia chyba bola tá, že ste ani jednou vetou nezdôvodnili, prečo sú možnosti s necelým delením zlé. Tam ste mohli stratiť jeden bod. Ďalší bod ste mohli stratiť pri nenapísaní odpovede na otázku zo zadania. Zvyšné body vám odišli, ak ste nedostatočne popísali postup, alebo ste riešenie našli skúšaním. Na tom by ani nebolo nič zlé, pokiaľ by ste ukázali, že ďalej skúšať nemá zmysel, lebo iné riešenie už nenájdete. Ak to totiž nespravíte, tak neukážete že ste našli všetky riešenia, čo od vás vždy chceme (Pokiaľ nie je v zadaní napísané inak).

Príklad č. 2 (opravovali Jankaa, Ľubka, Tinka):

Chceme zo zápaliek postaviť rovnostranný trojuholník, so stranou dĺžky 100 zápaliek.

1. Koľko zápaliek na to potrebujeme?
2. Koľko malých trojuholníčkov vytvoríme?

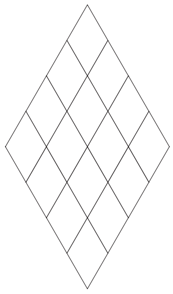
Prvý krok: Pomôžeme si spočítaním trojuholníčkov (obrázok 1). Nemôžeme počítať so všetkými, lebo susediace trojuholníčky majú spoločné strany – zápalky. Ak však budeme počítať len sivé, ktoré sa navzájom dotýkajú rohmi, celkový počet zápaliek bude trojnásobok ich počtu.



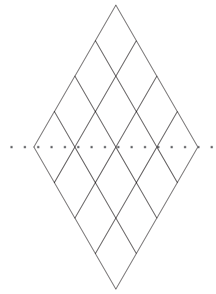
Obrázok 1: sivé a biele trojuholníčky

Sivých trojuholníčkov je v každom novom riadku o jeden trojuholníček viac ako v predchádzajúcom. V prvom je jeden, v druhom sú dva, v treťom tri, vo štvrtom štyri,..., v stom sto. Dohromady je potom počet sivých trojuholníčkov $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$. Počet zápaliek je $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100) \cdot 3$. Aby sme nemuseli zložito postupne sčítavať všetky čísla, rátanie si zjednodušíme. Spárujeme najväčšie číslo s najmenším, predposledné s druhým,..., teda $[(100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + (97 + 4) + \cdots + (51 + 50)] \cdot 3$. V zátvorke je 50 dvojíc čísel, pričom každá dvojica dáva súčet 101. Takže už nám stačí vypočítať $[101 \cdot 50] \cdot 3 = 5050 \cdot 3 = 15150$.
Odpoveď: Potrebujeme 15150 zápaliek.
Druhý krok: Už vieme (z prvého kroku), že počet sivých trojuholníčkov je 5050. Keď chceme zistiť, aký bude počet všetkých trojuholníčkov, stačí nám k počtu sivých trojuholníčkov prirátať počet bielych. A aký bude počet bielych trojuholníčkov? Opäť je v novom riadku vždy o jeden viac ako v riadku predchádzajúcom. V prvom teraz nie je ani jeden, v druhom jeden, v treťom dva, vo štvrtom tri,..., v stom ich potom bude deväťdesiatdeväť. Dohromady ich je potom $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99$. A tento súčet bude presne o 100 menší ako súčet $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$. Takže $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 = 5050 - 100 = 4950$. Počet všetkých trojuholníčkov bude súčet počtu sivých a bielych, teda $5050 + 4950 = 10000$.
Odpoveď: Vytvoríme 10 000 malých trojuholníčkov.
Komentár: Veľa z vás druhý krok riešilo takto:
Trojuholník s dvomi zápalkami na strane obsahuje 4 trojuholníčky= $2 \cdot 2$
Trojuholník s tromi zápalkami na strane obsahuje 9 trojuholníčkov= $3 \cdot 3$
Trojuholník so štyrmi zápalkami na strane obsahuje 16 trojuholníčkov= $4 \cdot 4$
...
Trojuholník so sto zápalkami na strane bude obsahovať 10000 trojuholníčkov= $100 \cdot 100$

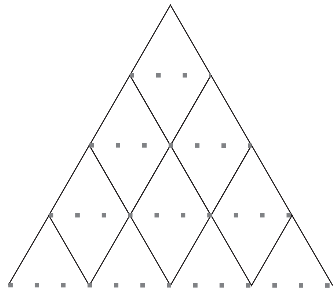
Táto úvaha je samozrejme správna, ale vaše riešenie nedostalo plný počet bodov, pokiaľ ste nevysvetlili, prečo to takto funguje. A prečo? Predstavme si štvorec (obrázok 2). Preň platí *počet zápaliek na strane* $\times$ *počet zápaliek na strane* = *počet štvorčekov.* Prepolením štvorca $100 \cdot 100$ vznikne trojuholník (obrázok 3). Lenže tento trojuholník sa nebude skladať z trojuholníčkov, ale zo štvorčekov. Takže ešte musíme každý štvorček predeliť na trojuholníčky (obrázok 4), čo znamená, že počet útvarov vo vnútri (štvorčekov, trojuholníčkov) sa nám zachová. Takže počet trojuholníčkov dostaneme $100 \cdot 100 = 10000$.



Obrázok 2: štvorec



Obrázok 3: predelený štvorec



Obrázok 4: predelené malé štvorčeky

Inak ste príklad veľmi pekne zvládli. Za každú časť ste mohli získať päť bodov. Týchto päť bodov, sme ešte rozdelili. Dva body boli za výsledok a tri za postup. Takže aj pokiaľ ste sa pomýlili v sčítavaní čísel a nevyšiel vám správny výsledok, stále ste mohli získať dosť bodov. Z toho vyplýva, že postup sa písať oplatí. Držíme vám palce v ďalšom riešení.

Príklad č. 3 (opravovali Monča, Uľa):

Tento príklad ste mohli riešiť dvoma spôsobmi, ale...

Uvedomme si najprv, že stačí, aby mala malá kocka natretú čo i len jednu stenu na to, aby sme ju považovali za natretú. Vypíšme si teda všetky možnosti natretia veľkej kocky do tabuľky (tabuľka 1) a ku každej pripíšme, aký útvar nám vytvoria všetky nenatreté kocky (jeho rozmery). Pri tvorení tabuľky myslime aj na to, ktoré steny veľkej kocky sú natreté. Niekedy teda dostaneme viac možností, ako bude vyzerať útvar z nenatretých kociek.

Počet natretých stien	Rozmery útvar z nenatretých kociek
1	$a \times a \times (a-1)$
2	$a \times (a-1) \times (a-1)$ $a \times a \times (a-2)$
3	$(a-1) \times (a-1) \times (a-1)$ $a \times (a-1) \times (a-2)$
4	$a \times (a-2) \times (a-2)$ $(a-1) \times (a-1) \times (a-2)$
5	$(a-1) \times (a-2) \times (a-2)$
6	$(a-2) \times (a-2) \times (a-2)$

Tabuľka 1: Natretia veľkej kocky

Dve steny môžeme natrieť dvojakým spôsobom – dve protiľahlé, alebo dve susediace (majú jednu hranu spoločnú). Preto máme dve možnosti útvarov vytvorených z nenatretých kociek. Tri steny môžeme taktiež natrieť dvoma spôsobmi. Okolo jedného vrcholu, alebo dve protiľahlé steny a akákoľvek medzi nimi. Ako môžeme natrieť štyri steny? Takto: Dve a dve protiľahlé, alebo dve protiľahlé a dve susediace.

Všimnime si, že vzniknutý nenatretý kváder môže mať najmenšiu stranu najviac o dve kocky menšiu, ako je strana pôvodnej kocky. To v prípade, že natrieme dve protiľahlé steny. Kocky pod týmito stenami však už nemožno zafarbiť. Preto najväčší možný rozdiel dĺžok strán kvádra z nenatretých kociek sú dve kocky (tj. rozdiel medzi a a $a-2$), teda 2 cm.

A (okrem Gamče):

Prvý postup: Tento kváder z nenatretých kociek musí tvoriť 45 kociek. Rozložíme si teda číslo 45 na súčin troch celých čísel (dĺžky strán sú v kockách, teda celých číslach): $1 \cdot 1 \cdot 45$, $1 \cdot 3 \cdot 15$, $1 \cdot 5 \cdot 9$, $3 \cdot 3 \cdot 5$. (pomôžeme si tzv. prvočíselným rozkladom: 45 je $3 \cdot 3 \cdot 5$; rôznou kombináciou týchto činiteľov dostaneme jednu stranu a zvyšné môžu byť zo zvyšných činiteľov, alebo dĺžky 1)

Len jedna možnosť, a to $3 \times 3 \times 5$, súhlasí s tvrdením, že dĺžky strán kvádra z nenatretých kociek sa môžu líšiť maximálne o dve kocky. V tomto prípade nám najdlhšia strana kvádra udáva veľkosť kocky a to je $5 \times 5 \times 5 = 125$. Dĺžky $3 \times 3 \times 5 = (a-2) \times (a-2) \times a$, teda natreté boli štyri steny kocky.

Druhý postup: Nenatretých bude 45 kociek, preto veľká kocka musí mať viac než 45 malých kociek. Neplatí to pre kocky so stranami 1,2 a 3, pretože počet ich kociek je 1, 8 a 27. Kocka s rozmermi $4 \times 4 \times 4$ má 64 kociek, teda viac ako 45. Ak natrieme jednu stenu kocky, tak odrátame od počtu všetkých kociek počet natretých, teda $64 - (4 \times 4) = 64 - 16 = 48$. Toľko je ešte nenatretých kociek. Ešte treba natrieť $48 - 45 = 3$ kocky. To sa však nedá, pretože natierame celé steny a vždy by to bolo viac ako tri. Vyskúšajme kocku s rozmermi $5 \times 5 \times 5$, teda s počtom kociek 125. Ak natrieme jednu stenu, odpočítame $5 \times 5 = 25$ a teda máme nenatretých ešte $125 - 25 = 100$ kociek. Druhú môžeme natrieť protiľahlú stenu, alebo susednú.

Ak natrieme protiľahlú, odpočítame $5 \times 5 = 25$. $100 - 25 = 75$. Tretiu stenu potom môžeme natrieť hociktorú a odpočítame $(5 - 2) \times 5 = 15$, pretože ostatných 10 (dva pásy kociek po 5 na krajoch tejto steny) je už natretých z inej strany. $75 - 15 = 60$. Štvrtú stenu môžeme natrieť tak, že nakoniec budú natreté dve a dve protiľahlé a vtedy odpočítame znova $(5 - 2) \times 5 = 15$. $60 - 15 = 45$. Toto je správny prípad. Treba ešte overiť, či sa nemôže nájsť aj iný.

Štvrtú stenu môžeme natrieť aj tak, že natrieme susednú k tretej natretej stene, teda odpočítame $(5-2)\times 4 = 12$. $60-12 = 48$. A 3 kocky už nijakým spôsobom nenatrieme, keďže natierame celé steny.

Ak ako druhú stenu natrieme susednú, odpočítame $(5 - 1) \times 5 = 20$, pretože pás 5 kociek je už natretých (a sú už odrátané) kvôli natretiu predošlej natieranej stany. $100 - 20 = 80$. Tretiu môžeme natrieť protiľahlú stenu k jednej z nich. Odpočítame teda znova $(5-1)\times 4 = 20$. $80-20 = 60$. Potom môžeme štvrtú stenu natrieť už len tak, ako sme natierali v predošlom prípade, pretože toto je tá istá situácia. Tretiu stenu môžeme natrieť aj inak. A to tak, že to bude susedná k obom natretým, teda všetky budú mať spoločný vrchol. Vtedy odpočítame $4 \times 4 = 16$. $60 - 16 = 44$. Čo je málo, preto ďalej už netreba pokračovať.

Presvedčme sa ešte, že odpoveďou nemôže byť aj väčšia kocka. Kocka s rozmermi $6 \times 6 \times 6$ má 216 kociek. Vo vnútri (tie čo nemôžeme zatrieť) je $4 \times 4 \times 4 = 64$ kociek, čo je viac ako 45, preto kocku $5 \times 5 \times 5$ a väčšie kocky už netreba brať do úvahy.
Odpoveď: Použili sme 125 kociek a natreli sme 4 steny kocky.

B (pre Gamču):
Prvý postup: Kváder z natretých kociek musí tvoriť 105 kociek. Rozložme si toto číslo na súčin celých čísel (strany kvádra sú počty kociek, čo sú celé čísla), aby sme zistili rozmery kvádra z nenatretých kociek. Je viac možností: $1 \cdot 1 \cdot 105$, $1 \cdot 3 \cdot 35$, $1 \cdot 5 \cdot 21$, $1 \cdot 7 \cdot 15$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, (pomôžeme si tzv. prvočíselným rozkladom: 105 je $3 \cdot 5 \cdot 7$; rôznou kombináciou týchto činiteľov dostaneme jednu stranu a zvyšné môžu byť zo zvyšných činiteľov, alebo dĺžky 1).

Ani jedna možnosť však nesúhlasí s tvrdením, že dĺžky strán kvádra sa môžu líšiť maximálne o 2 kocky, preto sme takto pri natieraní kocky nemohli skončiť.
Druhý postup: V tomto príklade vylúčime kocky so stranami 1,2 a 3, kvôli malému počtu kociek (1,8,27) a takisto aj kocku s rozmermi $4 \times 4 \times 4$, ktorá má 64 kociek. Kocka s rozmermi $5 \times 5 \times 5$ má 125 kociek, čo je dosť. No stačí natrieť jednu stenu a už je nenatretých kociek málo: $125 - 25 = 100$. Kocka so stranou 6 má 216 kociek. Ak natrieme jednu stenu 6×6, zostane $216 - 36 = 180$ nenatretých kociek. Druhú môžeme natrieť buď protiľahlú, alebo susednú stenu.

Ak natrieme protiľahlú stenu veľkosti 6×6 ostane nám $180 - 36 = 144$ nenatretých kociek. Ďalej zvolíme jednu zo štyroch stien spájajúcich tieto dve protiľahlé steny (je jedno ktorú), natrieme teda $6 \times 6 = 24$ kociek, ostane nám $144 - 24 = 120$ nenatretých kociek. Ďalšiu by sme mohli natrieť k nej susednú stenu ($4 \times 5 = 20$ kociek) alebo k nej protiľahlú stenu ($4 \times 6 = 24$ kociek), ale v oboch prípadoch by sme už zafarbili príliš veľa kociek.

Teda ako druhú musíme natrieť susednú stenu k prvej natretej a zostane nám $180 - 5 \times 6 = 150$ kociek.

Ak natrieme ako tretiu stenu susednú k obom už natretým, čiže všetky majú spoločný vrchol, vtedy nám zostane $150-5\times 5 = 150 - 25 = 125$. 20 kociek však už nijakým spôsobom nenatrieme. Ak natrieme tretiu stenu protiľahlú k jednej zo stien, odpočítame $5 \times 6 = 30$ kociek, takže nám ostane $150 - 30 = 120$ nenatretých. Chceli by sme 105 nenatretých, ale 15 kociek už nijako nezatrieme.

Kocka s rozmermi $7 \times 7 \times 7$ je už veľmi veľká, pretože vnútorných kociek (tie čo sa nedajú zatrieť) je 125 a to už je veľa. Takisto sú veľké aj všetky väčšie kocky.
Odpoveď: Príklad nemá riešenie.
Komentár: Väčšinou ste príklad riešili druhým spôsobom a niektorí, keď sa pokúsili prvým, len sa domotali. Príklad sa zdá jednoduchý a preto ste nám mnohí nenapísali podstatné veci čo sme chceli. Napríklad poukázanie na menšie alebo väčšie kocky. Najčastejšia chyba bola, keď ste si hneď povedali, že natriete protiľahlé steny a so susednými ste už nerátali. K odpovedi ste sa však vždy dostali, čo je super.

Príklad č. 4 (opravovali Kozzy, Sasho):

Vieme, že v jednej obálke je dvakrát viac ako v nejakej druhej a v tej je dvakrát viac ako v nejakej tretej, to znamená, že v nejakej obálke je štyrikrát viac peňazí ako v nejakej inej. V jednej obálke je 50 eur. Vo zvyšných dvoch obálkach teda môže byť:

a) Ak je 50 eur najnižšia možná výhra: $50 \cdot 2 = 100$ eur; $50 \cdot 4 = 200$ eur;
b) Ak je 50 eur druhá najnižšia možná výhra: $\frac{50}{2} = 25$ eur; $25 \cdot 4 = 100$ eur;
c) Ak je 50 eur najvyššia možná výhra: $\frac{50}{2} = 25$ eur; $\frac{25}{2} = 12,5$ eur.

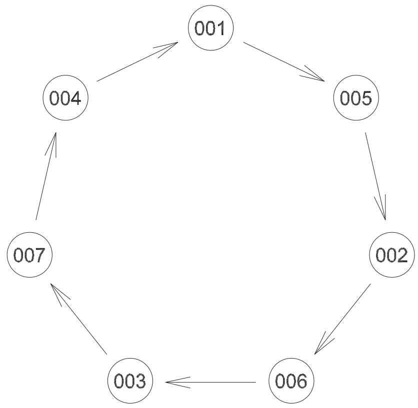
Možnosti a) aj b) môžu nastať, keďže 25, 50, 100 aj 200 eur vieme uložiť do obálok pomocou jednej, alebo dvoch bankoviek. Možnosť c) však nastať nemôže, pretože na poskladanie 12,5 eura by sme potrebovali bankovku s neceločíselnou hodnotou, čo nemáme.

Otvorili sme teda obálku, v ktorej sme našli 50 eur a vieme, že v zvyšných dvoch obálkach je buď 100 eur a 200 eur, alebo 100 eur a 25 eur. Vieme, že vždy je najvyššia možná výhra v jednej z tých dvoch zvyšných obálok. Musíme teda položiť otázku, podľa ktorej jednoznačne zistíme, v ktorej zo zvyšných dvoch obálok je vyššia suma. Táto suma bude určite najvyššia možná. Môžeme teda ukázať na jednu z neotvorených obálok a spýtať sa: „Je v tejto obálke viac peňazí ako v druhej neotvorenej obálke?“, alebo „Je v tejto obálke najvyššia možná výhra?“. Ak nám moderátor odpovie áno, v oboch prípadoch sme trafili najvyššiu výhru a môžeme si ju vziať. Ak odpovie nie, tak určite je najvyššia hodnota v druhej neotvorenej obálke, keďže 50 eur nikdy nie je najvyššia možná výhra.

Komentár: Väčšina z vás mala príklad výborne. Ostatní väčšinou zabudli vysvetliť, prečo 50 eur nemôže byť najvyššia možná výhra, za čo sme im s neveľkou radosťou strhli 2 body. Niektorí z vás nepochopili zadanie úplne správne a mysleli si, že práve v prvej obálke je 50 eur a práve v druhej je dvakrát toľko, no a niektorí si mysleli, že použiť musíme všetky bankovky, čo zadanie vôbec netvrdí a nejako im to nevychádzalo. Za to ste veľa bodov žiaľ nezískali.

Príklad č. 5 (opravovali Danka, Betka, Gabika):

Začnime prvou časťou úlohy. Najprv si treba uvedomiť, že každý agent sleduje práve jedného agenta a je práve jedným agentom sledovaný. Najjednoduchšie bolo riešiť tento príklad graficky. Nakreslili sme si 7 miest do kruhu pre 7 agentov (obrázok 5).

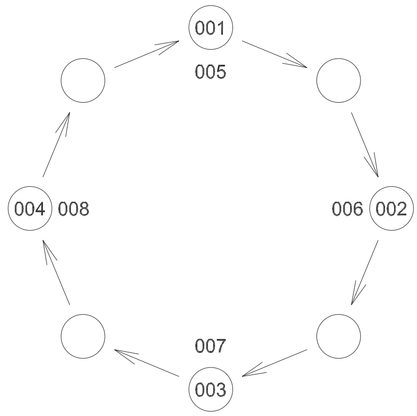


Obrázok 5: Sledovanie siedmich agentov

Umiestnili sme agenta 001 do ľubovoľného políčka. Zo zadania vieme, že agent 001 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 002. Ešte nevieme určiť koho sleduje agent 001, preto políčko vedľa neho je prázdne, ale do toho ďalšieho už môžeme doplniť agenta 002, lebo ten je sledovaný agentom, ktorého sleduje agent 001.

Potom rovnako agent 002 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 003. Čiže vynecháme jedno miesto a do ďalšieho doplníme agenta 003. Agent 003 sleduje neznámeho agenta, ktorý sleduje agenta 004. Dopíšeme do príslušného políčka agenta 004. Z obrázku vidíme, že agent 004 sleduje agenta 001 a zo zadania vieme, že agent 004 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 005. Teda agenta 005 musí sledovať agent 001. Agent 005 sleduje agenta 002 a vieme, že agent 005 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 006, teda agent 002 sleduje agenta 006. Agent 006 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 007 a keďže agent 006 sleduje agenta 003, tak agent 003 sleduje agenta 007. Vidíme, že všetky miesta sú už obsadené a všetci agenti spĺňajú rozkazy.

Podobne môžeme riešiť príklad aj pre 8 agentov. Nakreslili sme si 8 miest do kruhu (obrázok 6) a začali sme dopĺňať agentov. Agent 001, voľné miesto, agent 002, voľné miesto, agent 003, voľné miesto a agent 004. Lenže tu nastáva problém, pretože podľa veliteľovho rozkazu platí, že agent 004 sleduje agenta, ktorý sleduje agenta 005. Teda za agentom 004 by malo nasledovať jedno voľné miesto a potom agent 005. Toto miesto už ale patrí agentovi 001. Podľa veliteľových rozkazov by museli byť agenti 005, 006, 007, 008 na miestach agentov 001, 002, 003, 004. Sledovanie podľa rozkazov teda nie je možné.



Obrázok 6: Sledovanie ôsmich agentov

Odpoveď: Pri siedmich agentoch vieme jednoznačne zistiť, ktorý agent bude sledovať ktorého:

$$001 \to 005 \to 002 \to 006 \to 003 \to 007 \to 004 \to 001$$

Pri ôsmich agentoch to nie je možné, neexistuje ani jedna možnosť, ako by sa mohli sledovať.

Poznámka: Pre úplnosť treba overiť ešte taktúto vec: Zo zadania vieme, že každý agent má za úlohu sledovať práve *jedného iného* agenta a vieme aj že *každý niekoho sleduje* (z rozkazov). A preto je dobré predpokladať že sa budú sledovať do kruhu. Ale nemusia sa nutne sledovať len v jednom kruhu. Napríklad pri siedmich agentoch by sa mohli sledovať traja a potom ďalší štyria do kruhu. Naše zadanie je našťastie už konštruované tak, že tvorí jeden kruh (001, niekto, 002, niekto,. . . , 007, niekto, 001), čiže reťaz je uzatvorená a každý s každým (cez ostatných agentov) prepojený, iba ešte nevieme, kto sú „niekto". Ale môžeme si byť istí, že dva oddelené kruhy sa nám spraviť nepodarí. Netreba ale na túto alternatívu zabudnúť.
Komentár: Veľa z vás riešilo tento príklad vypisovaním možností, čo nebol zlý postup, lenže bol trošku zdĺhavejší a častou chybou bolo, že keď už ste našli správnu možnosť nepokračovali ste ďalej, aby ste overili, či je jediná. Za takéto riešenie sme nemohli dať plný počet bodov. Za správnu odpoveď v oboch častiach príkladu sme dávali 2 body a zvyšok ste mohli získať za postup, akým ste riešili. Výsledok ste mali skoro všetci správne, no najviac nás potešili niektoré originálne riešenia.

Príklad č. 6 (opravovali Natali, Maťo):

Na začiatok sa trochu zamyslíme. Takých 20! je strašne veľké číslo. To od nás predsa nikto nemôže chcieť, aby sme celý výraz spočítali. Bude treba vymyslieť nejaký jednoduchší spôsob ako tento príklad vyrátať. Našťastie my nepotrebujeme vedieť celý súčet, stačí nám posledná číslica.

Vieme, že to, aká číslica bude na poslednom mieste nejakého súčtu ovplyvňujú len číslice na posledných miestach všetkých sčítancov. Stačí nám teda zistiť, akými číslicami končia postupne súčiny $(1!)\cdot(1!)$, $(2!)\cdot(2!)$, až $(20!)\cdot(20!)$.

Vieme, že $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n$, teda že faktoriál nejakého čísla n je súčin všetkých čísel od jedna po n. Teda ak je $n \geq 5$, tak sa v takomto súčine určite nachádzajú čísla 2 a 5. Keďže $2\cdot 5 = 10$, tak s istotou vieme povedať, že takéto číslo bude násobkom desiatich a teda bude končiť nulou.

Už vieme, že čísla 5!, 6!, až 20! končia nulou. A keď číslo, ktoré je násobkom desiatich vynásobíme takým istým číslom, výsledok bude tiež násobkom desiatich (dokonca bude aj násobkom sto), teda bude tiež končiť nulou. Tým sme ukázali, že aj $(5!)\cdot(5!)$, $(6!)\cdot(6!)$, až $(20!)\cdot(20!)$ končia nulou a preto neovplyvnia to, aká číslica sa nachádza na poslednom mieste celého súčtu.

O tom, aké číslo bude na konci rozhodujú iba prvé 4 členy:
$(1!)\cdot(1!) = (1)\cdot(1) = 1$, na poslednom mieste je číslica 1.
$(2!)\cdot(2!) = (1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2) = 2\cdot 2 = 4$, na poslednom mieste je číslica 4.
$(3!)\cdot(3!) = (1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3) = 6\cdot 6 = 36$, na poslednom mieste je číslica 6.
$(4!)\cdot(4!) = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) = 24\cdot 24 = 576$, na poslednom mieste je číslica 6.

Súčet všetkých posledných číslic je teda $1+4+6+6+0+0+0+\dots+0 = 17$. Teda na poslednom mieste celého súčtu je 7.
Odpoveď: Súčet končí číslicou 7.
Komentár: V prvom rade vás chceme pochváliť, správny výsledok ste našli takmer všetci. Body sme vám ale strhávali za nie úplne dobré vysvetlenia prečo majú väčšie faktoriály na konci nulu, prípadne za to, že ste to nevysvetlili vôbec. Samozrejme, mohli ste to dokazovať viacerými spôsobmi, my sme vám tu ukázali iba jeden z nich. Ďalšia vec je, že rátať všetko pomocou kalkulačky nie je vždy najšťastnejší nápad, lebo pri tak veľkých číslach ako je $(20!)\cdot(20!)$ vám už kalkulačka výsledok zaokrúhli a poslednú cifru nezistíte, a teda niekedy je výhodnejšie trošku porozmýšľať a potrápiť hlavičku. Celkovo sme ale s vašimi riešeniami veľmi spokojní.

Príklad č. 7 (opravovali Halucinka, Palo, Peťo):

Uvarené voňavé kakauko s mliekom už určite stojí pred každým, kto si číta tento vzorák. Tak sa teda do neho pustime :).

Na začiatok odpovedzme na prvé dve otázky zo zadania – koľko hrnčekov čokolády a koľko mlieka som vypil. Najprv máme v pohári čistú čokoládu, neskôr do nej dolievame nejaké mlieko. Hrnček napokon zostane prázdny, čokoláda nemôže nijako inak zmiznúť a ani sme žiadnu nepridali, čiže musíme spolu vypiť práve 1 hrnček čokolády. Mlieko do pohára naopak len prilievame, ale takisto žiadne nemôže inak zmiznúť, čiže ho vypijeme práve toľko, koľko ho celkovo dolejeme. A to je podľa zadania $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{23}{24}$ hrnčeka.

Teraz prejdime k druhej, zložitejšej časti úlohy. Poďme postupne zisťovať, čo sa deje s podielom čokolády v hrnčeku pri jednotlivých prelievaniach (podiel mlieka bude automaticky zvyšok k podielu čokolády v hrnčeku). Po prvom odpití a doliatí pohára mliekom bude podiel čokolády v hrnčeku $\frac{7}{8}$. Pri druhom odpíjaní odpijeme tretinu celkového objemu pohára, čiže aj tretinu mlieka aj tretinu čokolády, a potom zvyšok doplníme mliekom. Zjavne nám v hrnčeku zostanú $\frac{2}{3}$ objemu čokolády čo v ňom bolo pred druhým odpíjaním. Tomu zodpovedá podiel čokolády $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$. Pri treťom odpíjaní a dolievaní v hrnčeku zostane práve polovica objemu mlieka aj čokolády, čiže tam zostane $\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{24}$ hrnčeka čokolády a zvyšok – $\frac{17}{24}$ pohára – bude mlieko. To znamená, že na to, aby som dosiahol ideálnu chuť nápoja hneď po prvom odpití, musím odpiť práve $\frac{17}{24}$ hrnčeka čokolády a doplniť ho mliekom.
Odpoveď: Vypil som 1 hrnček čokolády (zmes prášku a vody), $\frac{23}{24}$ hrnčeka mlieka. Ideálnu chuť môjho nápoja dosiahnem tak, že odpijem $\frac{17}{24}$ objemu hrnčeka a doplním ho mliekom.
Komentár: Väčšina z vás si s príkladom poradila naozaj vynikajúco, plné počty bodov neboli žiadnou výnimkou. Spolu ste mohli dostať 10 bodov, z toho 2 za prvú otázku, 3 za druhú a 5 za tretiu, v ktorej bolo bohužiaľ aj najviac chýb, veľakrát spôsobených len zlým prečítaním zadania. Takže, aké z toho plynie ponaučenie? Poriadne čítajte zadania a nakoniec budete mať všetci 10 bodov. Ale aj tak ste veľmi šikovní :)

Príklad č. 8 (opravovali Emil, Jančo):

A (okrem Gamče): Poďme sa na príklad pozrieť trošku inak, ako pozorovaním toho, koľko ľudí na ktorej zastávke musí nastúpiť a koľko vystúpiť. Bude nás zaujímať, koľko zostalo ľudí v autobuse po tom, čo na $x-$tej zastávke nastúpili a vystúpili tí, ktorí mali. Tých ľudí tam musí ostať toľko, aby podľa zadania mohol na každej ďalšej zastávke vystúpiť jeden človek, čo nastúpil na prvej, na druhej,..., na $(x)-$tej zastávke. Keďže pre každú dvojicu zastávok existuje jeden cestujúci, ktorý na prvej z nich nastúpi a na druhej vystúpi, tak po obslúžení $x-$tej zastávky ostane v autobuse z ľudí, ktorí nastúpili na 1. zastávke ešte toľko, koľko zastávok má autobus pred sebou. Rovnako z ľudí, ktorí nastúpili na druhej, tretej,..., $(x)-$tej zastávke ostalo v autobuse ešte toľko, koľko zastávok má autobus pred sebou.

Nakoľko je všetkých zastávok 14, z čoho x má už autobus za sebou, ostáva mu ešte navštíviť $14 - x$ zastávok. Preto aj cestujúcich, ktorí nastúpili na 1. zastávke a po obslúžení $x-$tej zastávky ešte sú v autobuse, je $14 - x$. Ako sme ukázali, rovnako to platí pre ľudí, ktorí nastúpili na druhej, tretej,..., $(x)-$tej zastávke. Preto po obslúžení $x-$tej zastávky je v autobuse $x \cdot (14 - x)$ ľudí.

Aby sme zistili, kedy je v autobuse najviac ľudí, vypíšeme si počty ľudí po jednotlivých zastávkach do tabuľky (tabuľka 2).

č. zastávky	počet cestujúcich po jej obslúžení
1	13
2	24
3	33
4	40
5	45
6	48
7	49

č. zastávky	počet cestujúcich po jej obslúžení
8	48
9	45
10	40
11	33
12	24
13	l3

Tabuľka 2: Ľudia v autobuse

Z tabuľky vidíme, že najviac cestujúcich je v autobuse po obslúžení 7. zastávky a to konkrétne 49.

Odpoveď: Vzťah pre počet cestujúcich, po tom, ako nastúpia a vystúpia na zastávke x je $x \cdot (14 - x)$. Najviac cestujúcich je v autobuse po obslúžení 7. zastávky a to konkrétne 49.

B (pre Gamču): Ak bolo v kine Matematik n ľudí, tak každý z nich tam mohol mať od 0 do $n - 1$ známych (nikto si sám sebe nemôže byť známym). Prirodzených čísel od 0 po $n - 1$ je n a preto, ak by mal každý z ľudí v kine iný počet známych, tak by tam musel byť aj človek, ktorý tam mal $n - 1$ známych aj človek, ktorý v kine nepoznal nikoho. Keď tam ale niekto poznal $n - 1$ ľudí, znamená to, že tam poznal každého. Preto musel poznať aj toho, ktorý nepoznal nikoho (pokiaľ to nebol on sám, čo by sa stalo pre $n = 1$), čo ale nie je možné, keďže známosti sú vzájomné. Preto, ak bol v kine viac ako 1 človek, čo vieme zo zadania (5 ľudí sedelo v prvom rade), tak tam museli byť aspoň dvaja ľudia, ktorí mali v kine rovnaký počet známych.

Komentár: U negamčákov sme za zistenie zastávky, na ktorej je najviac ľudí a ich počtu dali 5 bodov, ďalšie body sme pridávali podľa toho, či riešiteľ prišiel na všeobecný vzťah hoci nie úplne vysvetlený, alebo sa o to aspoň pokúsil. U gamčákov sme strhli bod za nevysvetlenie faktu, že podobne ako pri 5 ľuďoch musí byť dvojica ľudí z rovnakým počtom priateľov aj vtedy, keď je v kine viac ľudí. Ďalšie body sme strhávali za nedostatočné vysvetlenie niektorých krokov, prípadne iné nedostatky v postupe.

Príklad č. 9 (opravoval Jakuub):

Najdôležitejšie je nakresliť si prehľadný obrázok. Ale už tu sa musíme poriadne zamyslieť. V zadaní máme 5 rovnoramenných lichobežníkov, ale pri troch ($FBCG$, $HGCD$, $AEHD$) sme zamlčali, ktoré strany sú ich základne. Obrázok teda nemusí vyzerať tak, ako by sme ho intuitívne nakreslili. Stačí sa však zamyslieť nad jednotlivými prípadmi a zistíme pravdu. Zo štyroch strán lichobežníka sú len dve možnosti rozmiestnenia dvoch protiľahlých základní.

Najjednoduchší výber máme pri lichobežníku $HGCD$. Môžeme si načrtnúť lichobežníky $ABCD$, $EFGH$, ktorých základne už poznáme a navyše vieme, že základňa EF leží na základni AB. Jasne vidíme, že druhé základne, teda CD a GH musia byť rovnobežné. Takže sú to aj základne rovnoramenného lichobežníka $HGCD$.

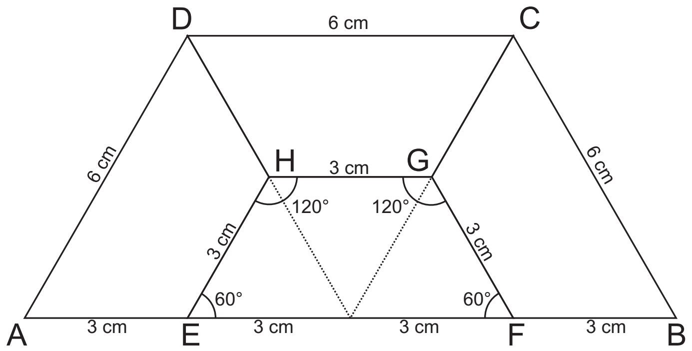
Ešte ostáva rozhodnúť, čo s lichobežníkmi $FBCG$, $AEHD$. Pomôžme si tvrdením zo zadania: Každý lichobežník má aspoň jeden uhol veľkosti $60°$. V našich naznačených rovnoramenných lichobežníkoch $ABCD$, $EFGH$ to určite budú oba pri väčších základniach AB a EF, pretože len tam má rovnoramenný lichobežník ostré uhly, ktoré majú navyše rovnakú veľkosť. Vidíme, že v oboch lichobežníkoch $ABCD$, $EFGH$ zvierajú ramená so základňami $60°$, preto je rameno AD rovnobežné s ramenom EH a rameno BC rovnobežné s ramenom FG. Inak povedané, našli sme základne lichobežníkov $FBCG$ a $AEHD$.

Pokračujme ďalej a postupne si urobíme presnú predstavu, ako to má celé vyzerať. Veľkosti uhlov pri druhej základni v lichobežníkoch $ABCD$, $EFGH$ získame dopočítaním do $180°$, teda pri kratšej základni budú mať uhly veľkosti $120°$ (vyplýva z vlastností každého lichobežníka). Všimnime si, že presne takto môžeme dopočítať uhly už aj v „krajných“ lichobežníkoch $FBCG$ a $AEHD$, pretože jeden uhol veľkosti $60°$ v nich už poznáme (pri vrcholoch A, resp. B). Z toho nám vyplynuli aj posledné, na oko zjavné, poznatky o tvaroch lichobežníkov:

1. Menšie základne v krajných lichobežníkoch budú vnútorné, teda EH a FG.
2. Úsečka HG bude určite ležať „pod“ úsečkou DC.
3. Základňa HG je menšia než základňa DC.

Jednou ranou teda už môžeme dopočítať uhly aj v lichobežníku $HGCD$. Buď podľa veľkostí základní, alebo dopočítaním pri niektorých vrcholoch. Všetky lichobežníky budú mať dva vnútorné uhly pri väčšej základni veľkosti $60°$ a zvyšné dva veľkosti $120°$.

Teraz naša predstava už môže pripomínať obrázok 7. Vyzerá to tak, že využitím ďalších vedomostí zo zadania sa určite dostaneme k ďalším zaujímavým skutočnostiam.



Obrázok 7: Lichobežník

Malé lichobežníky na obrázku sú podobné (to znamená, že všetky uhly majú rovnakej veľkosti). Koreňom úspechu je ale zistiť, že sú zhodné. Vidíme, že na obrázku majú niektoré spoločné ramená alebo základne. Dôležité ale je, že majú rovnaký obsah, čo vieme zo zadania. Spolu s tým, že sú podobné, nám to stačí na vyhlásenie, že všetky štyri lichobežníky sú zhodné (po prečítaní riešenia si všimnite poznámku na konci):

$$EFGH \cong HDAE \cong GCDH \cong FBCG$$

Postupne sme sa ale dostali k ďalšej zaujímavej pravde. Strana GF je v lichobežníku $EFGH$ ramenom a v lichobežníku $FBCG$ menšou základňou. Teda *v každom* zo zhodných lichobežníkov sú dĺžky ramien a menšej zo základní rovnaké. Táto dĺžka je podľa zadania 3 cm. V tomto momente sme vyčerpali všetko zo zadania a ďalej si musíme poradiť sami.

Záverečnou úvahou je, že takémuto rovnoramennému lichobežníku (s uhlami $60°$ a $120°$ a rovnako dlhým ramenom a kratšou základňou) vieme nad kratšiu základňu prikresliť malý rovnostranný trojuholník (predĺžením ramien). Vytvoríme tak veľký rovnostranný trojuholník, ktorý v sebe obsahuje spomínaný lichobežník. Vďaka dĺžkam úsečiek je zrejmé, že kratšia základňa lichobežníka tvorí v tomto trojuholníku strednú priečku. A stačí si prikresliť ostatné stredné priečky a vidíme, že lichobežník pozostáva z troch malých rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 3 cm (môžete to vidieť na obrázku 7 v lichobežníku $EFGH$).

Väčšie základne zhodných lichobežníkov teda majú veľkosť 6 cm. Konečne môžeme vypočítať obvod celého lichobežníka ABCD. Je to $4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$ cm.

Odpoveď: Lichobežník $ABCD$ má obvod 30 cm.

Poznámka: Ak majú dva lichobežníky rovnaký obsah a rovnaké vnútorné uhly, sú zhodné. Znie to síce pekne, a asi je to aj pravda. Ale s takýmto tvrdením sa príliš nestretávame (poznáme skôr vety o zhodnosti trojuholníkov), a preto sme sa rozhodli túto myšlienku na našich lichobežníkoch objasniť, aby ste si to aj sami vedeli odvodiť. Niektoré úvahy však budú ťažšie a preto to berte skôr ako návod, ako by to šlo.

Vidíme, že $FBCG$ a $GCDH$ majú spoločné rameno, vieme, že majú rovnaké uhly a podľa zadania majú aj rovnaký obsah. Z vedomosti o ramene a uhloch vieme presne zistiť výšku, a z vedomosti o výške a obsahu vieme zistiť súčet dĺžok základní. Taktiež vieme zistiť rozdiel dĺžok základní (je presne určený sklonom a dĺžkou ramien). Takže vieme zistiť dĺžky základní. A preto, ak majú dva rovnoramenné lichobežníky rovnako dlhé ramená, uhly, aj obsah, majú určite rovnako dlhé aj dĺžky základní, čiže sú zhodné. Z rovnakých dôvodov sú zhodné aj $HDAE$ a $GCDH$, a preto $AEHD \cong HGCD \cong FBCG$.

Teraz by sme chceli ukázať, že aj $EFGH$ je s nimi zhodný. Všimnite si, že môže nastať situácia, kde spomínané tri lichobežníky sú zhodné, ale „stlačia“ $EFGH$ do stredu. To znamená, že sa treba odraziť od toho, že $EFGH$ má rovnaký obsah ako zvyšné lichobežníky (napr. ako $HGCD$).

Naznačíme postup takéhoto dôkazu: Predĺžené ramená DH a CG sa pretnú v strede strany AB, označíme si ho S. Vytvoria tak rovnostranný trojuholník SCD, a tiež rozdelia lichobežník $EFGH$ na tri malé rovnostranné trojuholníčky, ako to aj v riešení. Preto rovnostranné, lebo $|EH| = |HG| = |GF|$, a to vidno zo zhodnosti zvyšných lichobežníkov. Obsah malých trojuholníčkov si vieme vypočítať pomocou ich strany (3 cm) cez Pytagorovu vetu. Rovnako aj obsah trojuholníka SCD si vieme vypočítať z $|DC|$. Takže teraz si vieme konečne obsah $HDAE$ a obsah $GCDH$ dať do rovnosti, s tým, že obsah $HDAE$ bude reprezentovať obsah SCD mínus obsah malého trojuholníčka, a obsah $GCDH$ budú reprezentovať tri malé trojuholníčky. Jedinú neznámu $|DC|$ si z tejto rovnosti dopočítame a zistíme, že je rovnako veľká ako $|EF| = 6$ cm. Takže sme napokon zistili, že lichobežníky $EFGH$ a $HGCD$ majú rovnaké dĺžky oboch základní. Keďže majú rovnaký aj obsah, budú mať rovnakú aj výšku. A keďže majú rovnakú výšku, budú mať rovnaké aj ramená. Takže sú zhodné.

Komentár: Veľa z vás to malo správne. Asi jediné chyby, ktoré sa vyskytovali, boli také, že ste bez hocijakého odôvodnenia rozdelili všetky lichobežníky na 3 rovnaké rovnostranné trojuholníky a neuvažovali ste nad tým, že by kratšia základňa nemusela byť 3 cm.

Týmto vzorovým riešením sme vás ale chceli upozorniť, že na korektné a prehľadné vyriešenie je potrebné, aby ste dôsledne zvolili postup vašich úvah a pri vašom výklade nezabudli ani na tie najmenej pravdepodobné reprezentácie zadania. Napríklad, predstavte si, že by sme začali rovno našim prehľadným nákresom zhodných lichobežníkov. Zvlášť tento príklad veľmi zvádzal k tomu, aby sme si lichobežníky rovno nakreslili správne (či skôr – najviac pravdepodobne) a z toho vyvodzovali závery. Ale to je akoby sme sa odrážali od nejakého našeho dohadu. Bez toho, aby sme ukázali, ktoré sú základne, si nemôžeme ešte podopĺňať uhly. A bez ukázania uhlov ešte nemôžeme tvrdiť, že obrázok, v ktorom je menšia základňa HG pod DC je správny (existuje napr. aj situácia $|HG| > |DC|$, samozrejme, s inými vnútornými uhlami). A tak ďalej – je veľa rôznych metód riešení, a v nich sa dajú ešte rôzne prehodiť úvahy. A je na nás, aby sme našli kombináciu, ktorá je najsprávnejšia. To je asi všetko k tomuto príkladu.

Prémia (opravovala Zuzka):

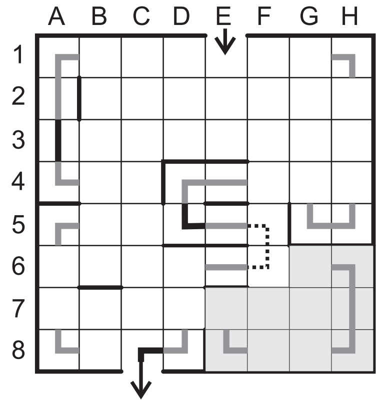
Zadanie: Na obrázku je nakreslené bludisko, skúste prejsť týmto bludiskom (vchod do bludiska a východ z neho je označený čiernymi šípkami) tak, aby ste na každé políčko vstúpili práve 1-krát.

Riešenie: Na začiatok je dobré doplniť si do bludiska (obrázok 8) všetky cestičky, ktorých smerovanie je jasné (v obrázku sú zaznačené šedou čiarou). Napríklad všetky rohové políčka ($A1, H1, A4, D4, \dots$) sú z dvoch strán ohradené, čiže cez zvyšné dve strany sa políčko musí napájať na cestu bludiskom (na danom políčku bude mať cestička tvar písmena „L“). Ďalej, napríklad políčko $A2$ je ohradené z dvoch protiľahlých strán, čiže cestička musí viesť cez políčko priamo. Takto sa snažíme doplniť čo najviac úsekov cesty.

A čo teraz? Teraz sa môžeme pokúsiť pospájať niektoré úseky. Začneme na obrázku hľadať také prázdne políčka, na ktoré smerujú dve cestičky zo susedných políčok (sú to: $A3$, $D5$, $C8$). Smerovanie cestičky na týchto políčkach je už jasné – cestička sa musí napájať na cestičky zakreslené na susedných políčkach (do obrázku doplníme tieto úseky čiernymi čiarami).

Keď sa na obrázok dobre pozrieme, všimneme si zaujímavú vec. Z políčka $F5$ môže cestička pokračovať smerom hore, alebo smerom dole. Ak by sme ju zakreslili smerom hore, tak na políčku $F4$ by bola len jedna možnosť doplnenia cestičky a to taká, ktorá by spojila cestu do uzavretej krivky (čo samozrejme nechceme, lebo by sme nevedeli prejsť celé bludisko). Tak nám nič iné neostáva, než nakresliť na políčku $F5$ cestičku, ktorá smeruje dole (v obrázku je zakreslená bodkovane). Smerovanie cestičky v políčku F6 je potom už jasné, pretože musí spájať cestičku v políčku $F5$ a $E6$.

Po takomto dokreslení jednoznačných cestičiek sa v pravom dolnom rohu bludiska vytvorila čiastočne oddelená oblasť (je vyznačená šedou farbou). Táto oblasť má len jeden vchod (z políčka $D7$ na $E7$), čiže ak do tejto oblasti vojdeme, už nebudeme vedieť vyjsť von bez toho, aby sme prešli po nejakom políčku dvakrát. Takže bludisko nikdy celé neprejdeme.



Obrázok 8: bludisko

Odpoveď: Bludisko sa nedá prejsť tak, aby sme na každé políčko stúpili práve raz.

Komentár: Z vašimi riešeniami to bolo tentoraz všelijaké. Napísať len doplnenie zadania, alebo riešenie (čiže v tomto príklade, že sa to nedá), naozaj nestačí. Ak neviete s takýmto typom príkladu hneď pohnúť, netreba sa vzdávať. Začnite si dopĺňať veci, ktoré sú isté a potom skúšať a skúšať a skúšať. A potom určite niečo objavíte. Ak nie, tak sa nebojte nám to vaše skúšanie poslať (možno vám to vyslúži pár bodíkov).