

Zadania 1. kola zimnej série 2008/2009

Termín: 29.09.2008

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 815 69 Bratislava 1

Pokiaľ toto čítate, poriadne si to rozmyslite, pretože by ste mohli utrpieť vážnu ujmu na zdraví. Aj keď, asi by som mal začať písať trochu inak, pretože na vašom mieste by ma celkom zaujímalo, aká ujma by mi hrozila a prečo. Takže, nemusíte sa báť, nič vám nehrozí a teda nemusíte ani čítať ďalej. Tak to by sme mali a už sa nikdy nikto nedozvie o mojich myšlienkach. Ak sa niekto náhodou k týmto záznamom dostal, s najväčšou pravdepodobnosťou sa mi niečo stalo.

Najprv by som sa mohol predstaviť. Volám sa Jonathan, celým menom Jonathan Lee Mark Russel. Hrozné meno, na kurze pre budúcich rodičov museli moju mamu učiť dobré hlúposti. Kamaráti ma však volajú Jon. Mám 14 rokov, ale moja stará mama mi s radosťou opakuje, že vyzerám na jedenásť. Úžasný pocit. Chodím do obrovskej školy, plnej ľudí od výmyslu sveta – športovcov, roztlieskavačov, hudobníkov, vedcov, bifľošov a intelektuálov, miláčikov a nenávidených.

Kam by som zaradil seba? Asi na neutrálnu pôdu, pretože mám veľa záľub. Baví ma šport, ale aj veda, hudbu si tiež rád vypočujem. Najviac času trávim v mojej izbe, kde mám vybavené výskumné laboratórium. Napríklad dnes ráno sa mi podarilo chytiť myš do pasce a nemohol som odolať, aby som s ňou neurobil pokus.

Prémia: Kus syra v tvare kocky je rozdelený na $\langle\langle$ Počet orieškov patriacich popoluške $\rangle\rangle \times \langle\langle$ Kolko olympijských medailí počas svojej doterajšej kariéry získali bratia Hochschornerovci? $\rangle\rangle \times \langle\langle$ V koľkom roku dvadsiateho storočia vzlietlo prvé motorové lietadlo Wright Flyer? $\rangle\rangle$ rovnakých malých kociek. Myš začne jest rožnú kocku. Po zjedení hociktorej malej $\langle\langle$ Čo je hodené podľa citátu G. J. Ceasara, vysloveného údajne pri prekročení rieky Rubikon? $\rangle\rangle$ pokračuje s niektorou stenou priľahlou kockou. Je možné, aby zjedla všetkých $\langle\langle$ Počet členských krajín Európskej únie $\rangle\rangle$ kociek a pri tom ako poslednú zjedla malú kocku v strede veľkej kocky?

(K riešeniu napíšte aj celé „doplnené“ zadanie.)

Bolo to veľmi zaujímavé, ale musel som ísť do školy. Keď som sa vrátil, na moje veľké sklamanie – myška zmizla. Mojou ďalšou obľúbenou činnosťou je pomáhanie u mamy v práci, aj keď to sa nestáva veľmi často, keďže pracuje ako hlavná vyšetrovatelka na polícii a málokedy majú niečo ľahké aj pre mňa.

Predvčerom ma zastavil jeden jej kolega a hovorí mi: „Hej, chlapče, počul som, že rád riešiš problémy. Je to tak?“

Neznámam, keď ma niekto volá chlapče, ale zaujímalo ma, s akým problémom by som mohol ja, neposedný zvedavý chlapčisko, pomôcť, preto som odvetil: „Áno, mám rád všetky hádanky, úlohy a problémy.“

„Výborne, tak potom tu mám niečo pre teba. Moja dcéra dostala v škole úlohu a nevie ju vyriešiť. Skús sa na to pozrieť.“

Príklad č. 5: Na lúke je päť detí, Alex, Ben, Caspar, Dean a Evan. Každé z nich má na hlave buď červenú, alebo modrú čiapku. Aj keď žiadne dieťa nevidí svoju čiapku, to, ktoré má červenú čiapku, vždy hovorí pravdu. Dieťa, ktoré má modrú čiapku, vždy klame. Jednotlivé deti povedali nasledujúce výroky:

Alex: „Vidím tri modré a jednu červenú čiapku.“

Ben: „Vidím štyri červené čiapky.“

Caspar: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky.“

Dean: „Vidím štyri modré čiapky.“

Zistite, aké čiapky môžu mať jednotlivé deti. Nájdite všetky možnosti.

Úlohu som hravo zvládol a policajt mi kúpil lízatko. Čo som malý chlapec?? Ale musím uznať, že bolo dobré.

Dnes k nám prišli na návštevu starý otec a stará mama. Teraz mám chvíľku času, lebo už konečne zaspali. Starý otec zbožňuje európsky futbal a hneď ma zahrnul číslami, štatistikami, taktikami, menami a chcel odo mňa pomoc.

Príklad č. 7: Na futbalovom turnaji sa zúčastnili reprezentácie Francúzska, Anglicka, Talianska a Nemecka. V prvý deň sa odohrali dva zápasy. Francúzsko – Anglicko 1 : 1 a Nemecko – Taliansko 1 : 2. V nasledujúcich dňoch sa odohrali ešte štyri zápasy, pretože sa hralo systémom každý s každým jeden zápas. Počas celého turnaja padlo spolu 11 gólov, z toho 2 do siete Talianska¹, ktoré na turnaji ani raz neremízovalo. Francúzi skončili so skóre² 2 : 3, Angličania so ziskom 2 bodov. Nemecko dvakrát prehralo. Vypĺňte tabuľku 1.

umiestnenie	štát	víťazstvá	remízy	prehry	skóre	body
	Francúzsko					
	Anglicko					
	Taliansko					
	Nemecko					

Tabuľka 1: Zápasy

(Za víťazstvo sú 2 body, za remízu 1 bod, za prehru 0 bodov. Viac bodov, znamená lepšie umiestnenie.)

¹súperi Talianska dali dva góly, teda prirátalo sa to k ich počtu gólov čo dali

²vo všetkých zápasoch, ktoré hralo Francúzsko, dali Francúzi dokopy 2 góly a všetci traja súperi dokopy 3 góly

Je ešte len 22:00, takto skoro určite nechcem ísť spať, úlohy do školy sme nedostali. Čo len budem robiť? Jasně, zahrám si moju obľúbenú hru.

Príklad č. 3: Mám ju rád, pretože ju môžem hrať sám. Nakreslím si štvorcovú sieť, ktorá má 7 riadkov a nekonečne veľa stĺpcov. Riadky sú očíslované od prvého po siedmy. Na začiatku si postavím ľubovoľne veľa figúrok hocikam do prvého a druhého radu. Potom si stanovím pravidlá, že figúrky sa pohybujú len preskakovaním. Teda napríklad figúrka A preskočí figúrku B . Preskočená figúrka B potom zmizne. Preskakovať sa môže dopredu, dozadu, doľava, doprava, *nie* šikmo.

A (okrem Gamče): Koľko najmenej figúrok treba na to, aby som aspoň jednu figúrku dostal do tretieho radu? A koľko najmenej figúrok treba na dostatie aspoň jednej do štvrtého radu?

B (pre Gamču): Koľko najmenej figúrok treba na to, aby som aspoň jednu figúrku dostal do piateho radu?

Hra ma celkom unavila a podľa hodín už bol čas, keď chodia spať moji spolužiaci, tak som si prezliekol pyžamo a zaspal som.

Príklad č. 1: Zúčastnil som sa medzinárodnej matematickej olympiády na Havaji, kde sa objavila takáto náročná úloha: Na štvorcovom papieri je nakreslený obdĺžnik s rozmermi 2×4 , vrcholy má v mrežových bodoch a strany má rovnobežné so stranami papiera. Vyfarbite štvrtinu z jeho obsahu, môžete pri tom vyfarbovať len celé štvorčeky, štvorcovej siete. Nájdite práve jedno riešenie.

Úlohu zdarne vyriešili všetci účastníci súťaže. Pri kontrole výsledkov organizátori s údivom zistili, že žiadne dve riešenia nie sú rovnaké a nikto nevyfarbil dva štvorčeky, ktoré spolu susedili stranou. Inak sa vyskytli všetky možné riešenia. Zistíte počet účastníkov tejto olympiády.

Vyhral som medailu a okolo mňa nadšene pobehovali Havajčanky s farebnými vencami z kvetov. Jedna začala kričať moje meno a ťahala ma za ruku. Bolo to príjemné, ale prečo ma držala tak silno? A prečo mnou začala triasť a mykať? Vtom som sa prebudil a miesto nádhernej Havajčanky som uvidel mamu, ktorá mala na tvári pleťovú masku a vôbec nevyzerala lákavo.

„No konečne si vstal. Musíš sa ponáhľať do školy, lebo nestihneš. Raňajky sú na stole. Stará mama ťa odvezie.“

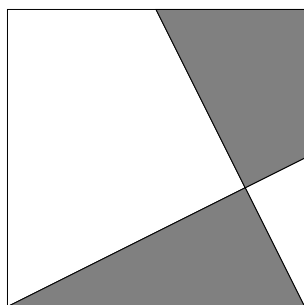
„Áno, mami,“ ozval som sa rozospátym hlasom a ponáhľal som sa do kuchyne. Cestou som si spomenul na zaujímavý obraz, ktorý som tiež dostal na Havaji.

Príklad č. 6: Mal tvar konvexného³ 5-uholníka $ABCDE$ a tiež platilo, že $|AB| = |AE| = |CD| = 1$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEA| = 90^\circ$ a uhly pri vrcholoch C a D sú rovnaké a $|BC| + |DE| = 1$. Vypočítajte obsah 5-uholníka $ABCDE$.

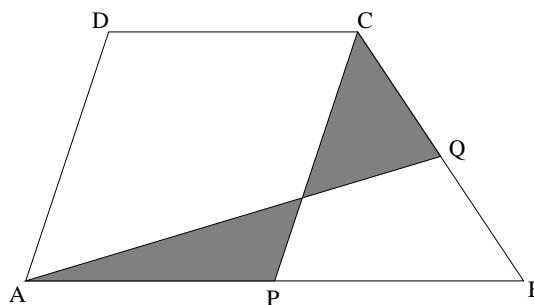
Zjedol som raňajky a rýchlo som zapol televízor, kde práve vysielali Súťaž na ranné zamyslenie.

Príklad č. 8:

A (okrem Gamče): Zistíte pomer obsahov vyfarbenej a nevyfarbenej časti štvorca (obrázok 1), ak úsečky na obrázku vedú z vrchola štvorca do stredu strany.



Obrázok 1: Štvorec



Obrázok 2: A toto čudo neviem čo je...

Rýchlo som poslal smskou odpoveď a trielil som do auta, kde už na mňa netrpezlivo čakala stará mama.

„Dobré ráno,“ pozdravil som a sadol si na predné sedadlo.

„Dobré aj tebe,“ usmiala sa, ale jej hlas bol nejaký iný, menej srdečný, „pod sedadlom máš darček od starého otca.“

„Ďakujem, dúfam, že už nič o futbale.“ Strčil som ruku pod sedadlo a našiel som šatku a lístok:

Ak tento príklad vyhráš, máš u mňa veľkú čokoládu, ale musíš ho vyriešiť bez používania rúk, preto ich musíš mať zaviazané za chrbtom.

Hm, to je zaujímavé, pomyslel som si.

„Stará mama, mohla by si mi prosím zaviazať ruky touto šatkou?“

„Miláčik, a to už prečo?“ Ukázal som jej lístok a ona len pokrútila hlavou: „Ach, ten starý výmyselník.“

Zaviazala mi teda ruky, vyštartovali sme a mohol som začať rozmýšľať.

Príklad č. 9: Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané tri nekolineárne⁵ body P, Q, R , v ktorých priamka výšky na stranu c , priamka osi uhla pri vrchole C a priamka ťažnice na stranu c v tomto poradí pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC . Žiadny z bodov P, Q, R nie je totožný s bodom C .

A ešte vám prezradím niečo úplne super. Je to síce *možno* trochu odveci, ale nevadí. Platí⁶ takáto vec: Ak pre body H, X, Y, Z a W ležiace na jednej kružnici platí, že $|\sphericalangle XHY| = |\sphericalangle ZHW|$, tak vieme, že $|XY| = |ZW|$. Ale pozor, aby všetky body ležali *na tej istej* kružnici.

Problém bol zaujímavý, ale nepodarilo sa mi ho vyriešiť bez pomoci rúk, papiera a ceruzky, ale hlavou mi preblesla myšlienka, že sme predsa dostali domácu úlohu z matematiky.

Príklad č. 4: Koľko existuje dvojčiferných čísel \overline{ab} takých, že rozdiel čísel \overline{ab} a \overline{ba} , teda $\overline{ab} - \overline{ba}$ je druhou mocninou prirodzeného čísla⁷ a cifry a aj b sú jednociferné prirodzené čísla?

A dokonca dve. Ako som mohol zabudnúť?

Príklad č. 2: Z piatich jedničiek, piatich dvojek, piatich trojek, piatich štvoriek a piatich pätiiek zostavíme päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú odpredu rovnako ako odzadu⁸ (napr. 32223), a potom tieto čísla sčítame. Akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže mať výsledný súčet?

Ako som tak rozmýšľal nad príkladmi, vôbec som nesledoval cestu a nepostrehol som, že ideme zlým smerom. Išli sme na úplne opačnú stranu, ako sme mali.

„Stará mama, veď ty ideš zle!“ zvolal som.

„Ja viem,“ odvetila, „urobíme si malý výlet.“ Uškrnula sa.

Zvláštne, začínal som mať mierne šteklenie v bruchu. Necítil som sa dobre a už vôbec nie so zviazanými rukami za chrbtom.

³to znamená, že má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°

⁴ale ktorá je dlhšia? z obrázka sa to vyčítať nedá... Dva prípady?

⁵neležiace na jednej priamke

⁶toto nemusíte zdvôvodňovať

⁷druhá mocnina prirodzeného čísla a je také číslo, ktoré sa dá zapísať ako $a \cdot a$

⁸takéto čísla sa volajú aj palindrómy