Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2008/2009

Príklad č. 1 (opravovali Halucinka, Spišo):

Ahojte bubáčikovia :). Začnime tým, že si spočítame, aký obsah má obdĺžnik. Obdĺžnik je rozmerov 2×4 políčka, teda obsah je 8 políčok. Štvrtina z toho má byť zafarbená, teda farbiť budeme dve políčka. Takže naša úloha sa mení na takúto: Ako zafarbiť práve dve políčka z obdĺžnika, aby sa nedotýkali stranou. Predstavme si teda náš obdĺžnik. Nech šírka je 4 a výška je 2. Teraz si označme políčka v prvom riadku A, B, C a D a v druhom riadku E, F, G a H.

A	B	C	D
E	F	G	H

Zamyslíme sa najprv nad tým, koľko je možností vyfarbenia dvoch *ľubovoľných* políčok obdĺžnika (aj takých, ktoré sa dotýkajú stranou). Dávame si pozor, aby sme nevypísali žiadnu dvojicu políčok dvakrát. Možnosti sú takéto:

AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
	BC	BD	BE	BF	BG	BH
		CD	CE	CF	CG	CH
			DE	DF	DG	DH
				EF	EG	EH
					FG	FH
						GH

Všimnite si, že spočítavame najprv všetky dvojice obsahujúce políčko A – tých je 7 (pretože k políčku A máme na výber 7 druhých políčok na zafarbenie). V ďalšom vypisovaní teda môžeme políčko A už úplne vynechať. Pokračujeme dvojicami s políčkom B – a tam je zvyšných 6 možností pre druhé políčko (už bez políčka A). Pri políčku C môžeme obmeniť 5 druhých políčok, atď. A skutočne, všetkých možností výberu dvoch políčok z ôsmich políčok je $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$. Takáto úvaha nám uľahčí počítanie, a navyše si môžeme byť istí, že sme na žiadnu dvojicu nezabudli.

Spolu je teda všetkých možností vyfarbenia práve dvoch políčok obdĺžnika 28. Zamyslíme sa teraz, ktoré z tých možností nevyhovujú zadaniu, teda v ktorých sa políčka dotýkajú stranou. Sú to tieto dvojice políčok: AB, AE, BC, BF, CD, CG, DH, EF, FG, GH.

Týchto možností je 10. Teda vyhovujúcich možností zafarbenia je $28 - 10 = 18$. Sú to tieto dvojice políčok: AC, AD, AF, AG, AH, BD, BE, BG, BH, CE, CF, CH, DE, DF, DG, EG, EH, FH.

Odpoveď: Účastníkov olympiády na Havaji bolo 18.

Komentár: Všetkým vám to išlo veľmi pekne. Niektorí si mysleli, že len vypísanie 18-tich možností je v poriadku, ale bolo treba ešte odôvodniť prečo ich viac nejde. Za to sme strhávali bodík dva. Ale celkovo ste boli skvelí. . .

Príklad č. 2 (opravovali Janka=), Gabika):

Podľa zadania máme hľadať také čísla, ktoré sa odpredu aj odzadu čítajú rovnako. Pre zaujímavosť, takéto čísla nazývame palindrómy.

K dispozícii máme päťkrát cifry 1, 2, 3, 4 aj 5 a tvoríme 5 päťciferných čísel, teda použijeme všetky cifry. Najskôr budeme hľadať najmenší možný súčet, ktorý môžeme dostať z týchto čísel.

Aby sme dostali najmenší súčet, musíme zrátavať čo najmenšie čísla, teda naše sčítance musia začínať čo najmenšími ciframi, a keďže sú sčítance podľa zadania palindromické, musia rovnako najmenšou číslicou aj končiť. Najmenšia cifra z tých, čo máme k dispozícii je 1 a máme ju 5-krát, teda ju môžeme použiť na začiatok a na koniec najviac dvoch čísel a jedna jednotka nám ešte zostane.

Druhou najmenšou cifrou je 2, rovnako ju môžeme použiť na dve čísla a jedna nám zostane. Ostáva nám ešte piate číslo, ktoré potrebuje čo najmenšiu prvú a poslednú cifru. Jednotky a dvojky nám už nezostali, preto bude začínať trojkou.

Ostali nám teda jedna jednotka, jedna dvojka, tri trojky a päť štvoriek a pätiek. Keďže sú všetky počty číslic nepárne, určite sa každá číslica bude nachádzať v strede nejakého čísla (lebo len táto číslica nemá svoj „zrkadlový obraz“), a keďže máme päť čísel a päť rôznych číslic, bude každá v strede – na mieste stoviek – práve raz.

Je jedno, do ktorého z päťciferných čísel ktorú číslicu umiestnime, lebo v konečnom dôsledku sa tieto číslice budú aj tak sčítavať a na poradí sčítancov predsa nezáleží $(100 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 100 \cdot (5 + 4 + 3 + 1 + 2)$ – hovoríme o komutatívnom zákone).

Ostali nám teda dve trojky a štyri štvorky a päťky, ktoré umiestnime na zvyšné miesta – na miesta desiatok a tisícok – tak, aby čísla boli palindromické. Na tom, do ktorého čísla ich umiestnime, nezáleží, keďže znovu ich nakoniec sčítame a keďže umiestnenie v rámci čísla už máme stanovené. Nezáleží nám teda pri výslednom súčte, či vytvoríme čísla 14541 a 23332 alebo 13531 a 24342, súčet bude rovnaký.

Dostali sme napríklad čísla: 13131, 14241, 24342, 25452, 35553 alebo 14241, 15351, 25152, 24542, 33433 alebo rôzne iné, ktoré dávajú vždy najmenší možný súčet 112719.

Najväčší súčet budeme hľadať rovnakým spôsobom, lenže na miesta desaťtisícok a jednotiek neuložíme čo najmenšie číslice, ale čo najväčšie – teda dve čísla budú začínať a končiť päťkou, dve štvorkou a jedno trojkou. V strede čísel na mieste stoviek budú číslice od 1 do 5 a zvyšné číslice rozdelíme do čísel na miesta desiatok a tisícok tak, aby boli čísla odzadu aj odpredu rovnaké.

Vyjdú nám napríklad čísla: 53535, 52425, 42324, 41214, 31113 alebo 53435, 51115, 41214, 42524, 32323 a pod.
Všetky tieto čísla dávajú súčet 220611, čo je aj najväčší dosiahnuteľný súčet.

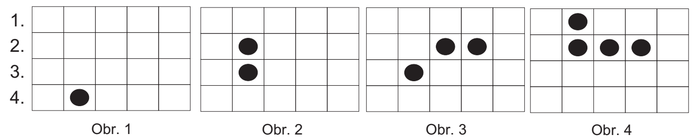
Odpoveď: Výsledný súčet môže mať hodnotu najmenej 112719 a najviac 220611.

Komentár: Príklad veľa z vás zvládlo, avšak nestačí poslať výsledok, treba podrobne popísať, ako ste sa k nemu dopracovali. Žiaľ, viacerí z vás nepochopili zadanie a zrátavali 11111+11211+11311 atď. Vzhľadom na to, že zadanie znelo inak, mohli ste dostať body len za postup, ak bol vzhľadom na vaše poňatie zadania správny. Za správne pochopenie zadania a dobrý výsledok ste mohli dostať maximálne 3 body, za vysvetlenie, ako umiestňujete prvé číslice, 2 body, a ak ste k tomu vysvetlili aj čo je na mieste jednotiek, dostali ste ďalší bod. Ak ste vysvetlili, ako ste umiestňovali zvyšné číslice, dostali ste ďalšie dva body a ak ste si aj všimli, že na poradí jednotlivých číslic medzi číslami nezáleží (teda je jedno, či vytvoríme 15551 a 14341 alebo 15351 a 14541), dostali ste plus 2 body. . .

Príklad č. 3 (opravovali iFka, Marta K., Peťo):

Najjednoduchšie ako zistiť najmenší počet figúrok potrebný na dosiahnutie nejakého riadku je, že pôjdeme odzadu. To znamená, že na začiatku budeme mať jednu figúrku v treťom, štvrtom alebo piatom riadku, podľa toho kam sme figúrku mali dostať. Ďalej budem s figúrkou skákať „opačne“. To znamená, že figúrka namiesto aby vyhodila nejakú inú figúrku pri jej preskočení, tak síce bude skákať rovnako ako normálne (o dve políčka dopredu, dozadu, vpravo alebo vľavo), ale cez prázdne políčko a na tomto preskočenom políčku vytvorí novú figúrku. Cieľom je, aby sa všetky figúrky dostali do prvého a druhého riadku, čiže do začiatočnej pozície. Najmenší počet figúrok, ktorý hľadáme, bude o jedno väčší ako najmenší počet takýchto skokov, pretože jednu figúrku postavíme na začiatku (pred začatím „opačného“ skákania) a každým skokom jednu pridáme.

A (okrem Gamče): V prvej časti je na začiatku jedna figúrka v treťom riadku. Najrýchlejšie sa môže figúrka dostať do prvého alebo druhého tak, že preskočí políčko nad ňou v druhom riadku a teda sa dostane do prvého riadku a vytvorí figúrku v druhom riadku. Všetky figúrky, čo sú na pláne, sú v prvom alebo v druhom riadku. Túto pozíciu môžeme považovať za východziu. Najmenší počet skokov je jeden, pretože bez pohnutia sa do východzej pozície nedostaneme. A teda najmenší počet figúrok na to, aby sa aspoň jedna figúrka dostala do tretieho riadku je dva.

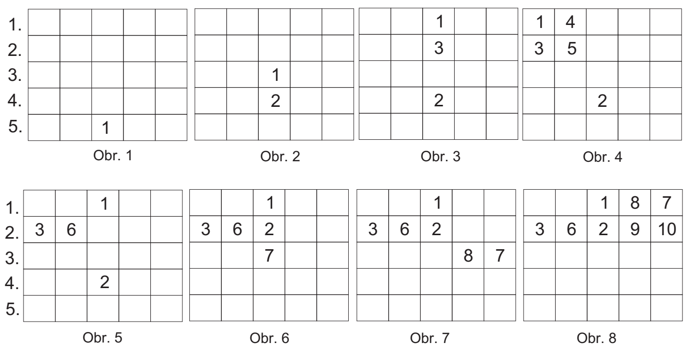


Obrázok 1: Obrázky k 3A

V druhej časti je na začiatku jedna figúrka v štvrtom riadku (Obrázok 1/Obr.1). Táto figúrka sa môže dostať najvyššie do druhého riadku a to tak, že preskočí políčko nad sebou v treťom riadku → jedna figúrka je v druhom a jedna v treťom riadku (Obrázok 1/Obr.2). Ak by prvá figúrka skákala do strany alebo dozadu, vytvorila by novú figúrku v štvrtom alebo piatom riadku a to by určite nebola lepšia pozícia ako teraz.

Z tejto pozície sa do východzej na jeden skok nedostaneme. Ale môžeme to skúsiť na dva. Figúrku, čo je v druhom riadku potrebujem dostať preč, aby figúrka, čo je v treťom riadku mohla skočiť do prvého. To spravíme tak, že figúrka v druhom riadku preskočí vpravo alebo vľavo, stále v druhom riadku, a vytvorí tak novú figúrku na preskočenom políčku (Obrázok 1/Obr.3).

Teraz už stačí, aby figúrka z tretieho riadku preskočila políčko nad sebou v druhom riadku a tým sa dostala do prvého riadku (Obrázok 1/Obr.4). Takže figúrka sa dostala do prvého riadku a vytvorila figúrku v druhom riadku. Teraz máme už všetky figúrky v prvom alebo v druhom riadku. Najmenší počet skokov bol tri a teda najmenší počet figúrok potrebných na to, aby sa aspoň jedna figúrka dostala do štvrtého riadku, je štyri.



Obrázok 2: Obrázky k 3B

B (pre Gamču): Na začiatku máme jednu figúrku v piatom riadku (Obrázok 2/Obr.1). Táto figúrka sa nemôže dostať na jeden skok do prvého alebo druhého riadku, preto sa musíme snažiť dostať ju aspoň čo najbližšie k týmto dvom radom. Figúrka 1 v piatom riadku preskočí voľné políčko nad ňou v štvrtom riadku, čím sa dostane do tretieho riadku a vytvorí figúrku 2 v štvrtom riadku. Ak by prvá figúrka skákala do strany alebo dozadu, vytvorila by novú figúrku v piatom alebo šiestom riadku, čo je viditeľne horšia pozícia ako táto naša(Obrázok 2/Obr.2). Toto je jednoznačný prvý skok (keď skáčeme „odzadu“).

Figúrkou 1 skočíme hore do prvého riadku a vytvoríme figúrku 3 (Obrázok 2/Obr.3). Figúrka 2 v štvrtom riadku sa dokáže aj spolu so všetkými ňou vytvorenými figúrkami dostať do východzej pozície na tri skoky. Vysvetlenie si môžete prečítať v časti 3A.

To však pre ňu musíme urobiť priestor. Tu nastávajú dve možnosti.

Prvá možnosť je skočiť s figúrkami 1 a 3 do strany a tak síce vytvoriť až ďalšie dve figúrky (4 a 5), ale už budú všetky okrem druhej figúrky v prvom alebo druhom riadku a figúrka 2 to už zvládne na spomínané tri kroky (Obrázok 2/Obr.4).

Takže by sme spravili $1 + 3 + 3 = 7$ skokov, aby sme dostali figúrky do východzej pozície.

Druhá možnosť je, že uhneme do strany iba s figúrkou 3 a figúrku 1 necháme tam kde je (Obrázok 2/Obr.5). Vytvorenej figúrke dáme číslo 6, nech sa nám nemýli s tými predchádzajúcimi. V takejto pozícii však nevieme dostať zvyšné figúrky do východzej pozície na 3 skoky, ale iba na 4. (Obrázok 2/Obr.6, 7 a 8).

Pri oboch možnostiach sme potrebovali 7 skokov a teda je nutné použiť najmenej 8 figúrok.

Odpoveď: Aby sa aspoň 1 figúrka dostala do tretieho riadku sú potrebné dve figúrky, do štvrtého riadku 4 figúrky a do piateho riadku je potrebných 8 figúrok.

Komentár: Príklad bol na prvý pohľad jednoduchý, ale pozor, napísať iba riešenie nestačí. Aby ste získali 10 bodov bolo nutné vysvetliť, prečo sa to nedá vyriešiť aj s menším počtom figúrok, alebo aspoň nejako popísať ako ste umiestňovali figúrky a prečo. Za takéto vysvetlenie sme pridávali 2 až 3 body. Za správne riešenie ste mohli získať 4 body a za pekný obrázkový a slovný postup skákania figúrok ste mohli získať najviac 3 body podľa toho, ako to bolo prehľadné. Chceli by sme vás upozorniť, že výsledok naozaj nie je všetko. Snažte sa písať všetky vaše myšlienkové postupy, nech vieme, ako ste na to išli. Želáme veľa počítacej nálady.

Príklad č. 4 (opravovali Danielka, Marek):

Číslo $\overline{ab}$ si môžeme rozpísať ako $10a + b$. Podobne postupujeme aj pri čísle $\overline{ba}$. Čiže rovnicu zo zadania $\overline{ab} - \overline{ba} = x^2$ si môžeme napísať ako $(10a + b) - (10b + a) = x^2$

Túto rovnicu si nasledovne upravíme:

$$\begin{aligned}(10a + b) - (10b + a) &= x^2\\ 10a + b - 10b - a &= x^2\\ 9a - 9b &= x^2\\ 9 \cdot (a - b) &= x^2\end{aligned}$$

Poďme sa teraz pozrieť, ako sa bude správať rozdiel $(a - b)$. Vieme, že platí $a \neq b$, pretože potom by sa $\overline{ab} - \overline{ba} = 0$ a 0 nie je druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla. Ak rozdiel medzi a a b bude 1, tak celkový rozdiel medzi $\overline{ab} - \overline{ba}$ bude 9. Podobne, ak rozdiel medzi a a b bude 2, tak celkový rozdiel bude 18 a tak ďalej... Z predchádzajúcej úvahy a zároveň aj z rovnice $9 \cdot (a - b) = x^2$ zistíme, že x^2 bude vždy násobkom čísla 9.

Teraz si vypíšeme možnosti pre x^2: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$. Vidíme, že iba čísla $9, 36$ a 81 sú deliteľné číslom 9.

Pre $x^2 = 9$ si vytvoríme tabuľku (tabuľka 1), pričom vieme, že rozdiel $a - b$ bude 1. To nám dáva 8 vyhovujúcich dvojciferných čísel. Taktiež pre $x^2 = 36$ si možeme vytvoriť tabuľku (tabuľka 2), ale v tomto prípade je rozdiel $a - b$ rovný 4. To je ďalších 5 vyhovujúcich dvojciferných čísel.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{ab} - \overline{ba}$	$21 - 12$	$32 - 23$	$43 - 34$	$54 - 45$	$65 - 56$	$76 - 67$	$87 - 78$	$98 - 89$

Tabuľka 1: Pre $x^2 = 9$

a	5	6	7	8	9
b	1	2	3	4	5
$\overline{ab} - \overline{ba}$	$51 - 15$	$62 - 26$	$73 - 37$	$84 - 48$	$95 - 59$

Tabuľka 2: Pre $x^2 = 36$

Pre $x^2 = 81$ by musel byť rozdiel a a b rovný 9 a to je možné jedine vtedy, ak $a = 9$ a $b = 0$. Lenže 0 nie je prirodzené číslo a súčasne by to nespĺňalo ani ďalšiu podmienku, ktorá vraví, že $\overline{ab} - \overline{ba}$ má byť rozdiel dvoch dvojciferných čísel, čo $90 - 9 = 81$ nie je.

Odpoveď: Takýchto čísel existuje 13.

Komentár: Väčšinou ste na to išli dobre, niekedy však nebol dostatočný postup. Napísať, že ste skúšali, alebo napísať dokonca len výsledok nestačí. Inak vám príklad nerobil veľmi veľké problémy. Niektorí z vás považovali aj nulu za prirodzené číslo, čím vám vyšlo viac možností, ktoré neboli správne.

Príklad č. 5 (opravovali Maják, Cigo, Vosuš):

Začnime napríklad Benovým výrokom. Tvrdí: „Vidím štyri červené čiapky.“. Predpokladajme, že by Ben mal červenú čiapku (teda hovoril pravdu). Potom by aj všetci ostatní museli hovoriť pravdu. Lenže Dean tvrdí, že vidí štyri modré čiapky, čo v tomto prípade nemôže. Keďže Dean by mal červenú čiapku a klamal by, tak táto možnosť nie je správna, a Ben bude mať modrú čiapku.

Pokiaľ by Dean hovoril pravdu, tak by všetci ostatní klamali a mali modrú čiapku. Lenže v tomto prípade by hovoril Alex pravdu (lebo by videl „. . . tri modré a jednu červenú čiapku.“), teda táto možnosť tiež nemôže nastať. Z toho vyplýva, že Dean musí klamať.

V tomto momente už vieme o dvoch chlapcoch, že majú určite modré čiapky. Caspar tvrdí: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky.“ Z toho je vidieť, že aj on klame, pretože už musí vidieť aspoň dve modré. Caspar má teda tiež modrú čiapku.

Zamerajme sa teraz na Alexa. Ako prvé predpokladajme, že by Alex mal modrú čiapku, teda klamal. V tom prípade jeho výrok musí byť nepravdivý. To znamená, že nesmie vidieť tri modré a jednu červenú čiapku. Keďže už o troch modrých čiapkach vieme, tak aby naozaj klamal, tak by musel aj Evan mať modrú čiapku. V tom prípade by všetkých päť chlapcov malo modré čiapky. Tu ale nastáva problém, pretože Deanova veta by sa stala pravdivou, a teda by nemohol mať modrú čiapku. Preto Alex nemôže mať modrú čiapku.

Vyskúšajme druhú možnosť, nech má Alex červenú čiapku a hovorí pravdu. Potom z jeho výroku vyplýva, že ešte niekto musí mať červenú čiapku. Tým niekým je náš mlčanlivý Evan.

Podarilo sa nám nájsť jediné riešenie. Jeho platnosť vieme overiť aj tak, že si prejdeme všetky výroky. Iné riešenie neexistuje, pretože sme naším spôsobom iné možnosti rozloženia čiapok zavrhli.

Odpoveď: Úloha má jedno riešenie, a to, že Alex a Evan majú červenú čiapku a Ben, Caspar a Dean majú modrú čiapku.

Komentár: Najčastejšia chyba, ktorú ste robili, bola uspokojenie sa s prvým nájdeným riešením. Problém je v tom, že tým by ste mohli nenájsť ďalšie riešenia, ktoré by sa mohli ukrývať v možnostiach, na ktoré ste zabudli. Teda ak máte nejaký postup, ktorým to robíte, treba to vždy dotiahnuť až do konca, aby ste ukázali, že ste naozaj našli všetko. To platí aj pre riešenia riešené vypísaním všetkých možností. Ďalej v zadaní sa nepíše, že aspoň niekto musí mať modrú alebo červenú čiapku – pokojne by všetci mohli mať jednej farby. A teraz pár slov k bodovaniu. Za samotnú správnu odpoveď ste mohli získať dva body. Zvyšných osem bol za postup. Podľa závažnosti jednotlivých chýb ste z týchto ôsmich bodov zas nejaké stratili. Asi najhoršie dopadli tí, čo celkom nepochopili zadanie. Dobrá rada do budúcnosti – napíšte radšej viac ako menej, pretože v niektorých prípadoch sa vôbec nedalo prísť na to, čo tou ktorou vetou autor myslel.

Príklad č. 6 (opravovali Mišo, Jančo, Monča):

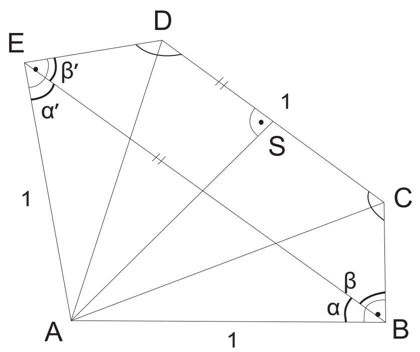
Aby sme dokázali vypočítať obsah päťuholníka $ABCDE$, musíme ho rozdeliť na útvary, ktorých obsah vypočítať vieme a tiež určiť veľkosti strán, ktoré zatiaľ presne nepoznáme. Na začiatku si rozdelíme tento päťuholník na dva útvary tak, že spojíme body B a E (Pozeraj obrázok 3). Vznikne trojuholník ABE a štvoruholník $BCDE$. Trojuholník ABE je rovnoramenný, pretože jeho dve strany, AB a AE, sú rovnako dlhé, čo vieme zo zadania. Z rovnoramennosti vyplýva, že uhly pri jeho základni ($\sphericalangle ABE$ a $\sphericalangle AEB$) sú rovnaké. Označíme si tieto rovnako veľké uhly ako α a α' a uhly $\sphericalangle CBE$ a $\sphericalangle DEB$ ako β a β'. Zo zadania ďalej vieme, že aj uhly $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DEA$ majú rovnakú veľkosť, 90°. Preto platí:

$$|\sphericalangle ABC| - \alpha = |\sphericalangle DEA| - \alpha'$$

Pritom na obrázku vidíme:

$$|\sphericalangle ABC| - \alpha' = \beta$$
$$|\sphericalangle DEA| - \alpha' = \beta'$$

Z toho vyplýva, že $\beta = \beta'$.



Obrázok 3: Päťuholník

Štvoruholník $BCDE$ má dva a dva susedné uhly rovnaké (okrem β a β' sú tam podľa zadania rovnaké uhly pri vrcholoch C a D). To je charakteristické pre rovnoramenný lichobežník. Aj preto sú strany BE a CD rovnobežné. Rovnobežnosť by sa dala ukázať aj pomocou súčtu vnútorných uhlov v štvoruholníku (to je 360°). Uhly pri vrcholoch D a E dávajú dokopy 180° a teda priamy uhol.

V rovnoramennom lichobežníku sú navyše strany BC a DE rovnako dlhé. Vieme, že $|CD| + |DE| = 1$, preto dĺžka oboch týchto úsečiek musí byt $\frac{1}{2}$.

Teraz dokážeme pomerne ľahko vypočítať obsah trojuholníkov ABC a ADE, ktoré sú zhodné na základe vety SUS. Obsah oboch je $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, teda spolu v súčte je to $\frac{1}{2}$. Ostáva nám už len vypočítať obsah trojuholníka ACD. Keďže $BCDE$ je rovnoramenný lichobežník s hlavnou základňou BE a ABE je rovnoramenný trojuholník so základňou BE, celý päťuholník $ABCDE$ je symetrický a trojuholník ACD je tiež rovnoramenný so základňou CD. Výška na túto základňu je zároveň ťažnicou a päta výšky stredom strany CD. Teda platí: $|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle ASD| = 90°$ a podľa vety SUS sú trojuholníky ACS a ASD zhodné. Zároveň, sú zhodné aj s trojuholníkmi ABC a ADE. Majú totiž spoločnú stranu, pravý uhol, a pretože $|CD| = 1$, majú tiež stranu dĺžky $\frac{1}{2}$. Preto obsah každého z nich je $\frac{1}{4}$ a spolu je to $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Odpoveď: Obsah päťuholníka $ABCDE$ je 1 plošná jednotka.

Komentár: Za ukážku, že BC a DE sú rovnako dlhé za pomoci rovnoramennosti $\triangle ABE$ a zhodnosti uhlov ste mohli dostať až 4 body. Za to, že ste presne vysvetlili, prečo sú všetky trojuholníky zhodné, ďalšie štyri. Samozrejme, uznávali sme aj ak si starší z vás pomohli Pytagorovou vetou. No a dva bodíky boli za výsledok. Príklad bol dosť náročný a navyše niektorí z vás sa príliš unáhlili a občas preskočili dôležité kroky a odvodenia. Ak si n to dáte v budúcnosti pozor, určite sa budete častejšie tešiť z plného počtu bodov za príklad.

Príklad č. 7 (opravovali Emil, Kozzy, Ľubka, Tinka):

Prehľadný spôsob riešenia, ale aj čítania tohto vzoráku, je postupné zapisovanie si výsledkov jednotlivých zápasov do tabuľky. Podľa zadania získali Angličania na turnaji 2 body. O jednom z nich vieme, že ho získali za remízu s Francúzskom 1:1. Keďže vo zvyšných dvoch zápasoch získali len 1 bod, museli ešte raz remizovať a raz prehrať. S Talianskom remizovať nemohli, pretože Taliansko na turnaji ani raz neremizovalo. Takže druhú remízu (prvá bola s Francúzskom) museli uhrať s Nemeckom a s Talianmi museli prehrať.

O Nemecku zo zadania vieme, že dvakrát prehralo a z toho raz to bolo s Talianskom 1:2. Navyše sme zistili, že s Talianmi remizovali, z čoho vyplýva, že zvyšný zápas Nemecka musí byť prehra s Francúzskom.

Francúzi podľa zadania dali na turnaji 2 góly, z toho jeden strelili Angličanom pri remíze 1:1. Ďalej sme zistili, že vyhrali nad Nemcami. Keďže im však mohli dať maximálne 1 gól, tento zápas sa musel skončiť 1:0. V dvoch zápasoch Francúzov, ktorých výsledky už poznáme, strelili Francúzi 2 góly a 1 dostali. Aby teda sedelo ich zadané skóre 2:3, museli v treťom zápase, ktorý hrali proti Talianom, prehrať 0:2.

	F	A	T	N
F	x	1:1	0:2	1:0
A	1:1	x	1:2	0:0
T	2:0	2:1	x	2:1
N	0:1	0:0	1:2	x

Tabuľka 3: Výsledky jednotlivých zápasov

Keď sčítame počet gólov, ktoré padli v zápasoch, ktorých výsledky už poznáme (zadané F:A, N:T, zistené F:N, F:T), zistíme, že ich bolo 8. Ako však podľa zadania vieme, na turnaji ich padlo spolu 11, čo znamená, že vo zvyšných dvoch zápasoch (A:T, A:N) padli práve tri góly. V zápasoch Talianska proti Francúzsku a Nemecku, dostali Taliani spolu 1 gól. Zo zadania však vieme, že Taliani inkasovali na turnaji od súperov 2 góly, preto ten druhý museli dostať v zápase s Angličanmi. Ako sme si však už ukázali v prvom odseku, Angličania museli s Talianmi prehrať a preto Taliani museli v tomto zápase dať aspoň 2 góly. Keďže však vieme, že v tomto zápase viac ako tri góly padnúť nemohli, tak Taliani nemohli dať viac ako 2 góly a teda Taliansko porazilo Anglicko 2:1.

Keďže v piatich zápasoch, ktorých výsledky už poznáme, padlo 11 gólov, tak v poslednom zápase Anglicko-Nemecko žiadny nepadol. Takže sa zápas skončil remízou 0:0.

Výsledky jednotlivých zápasov máme v tabuľke 3.

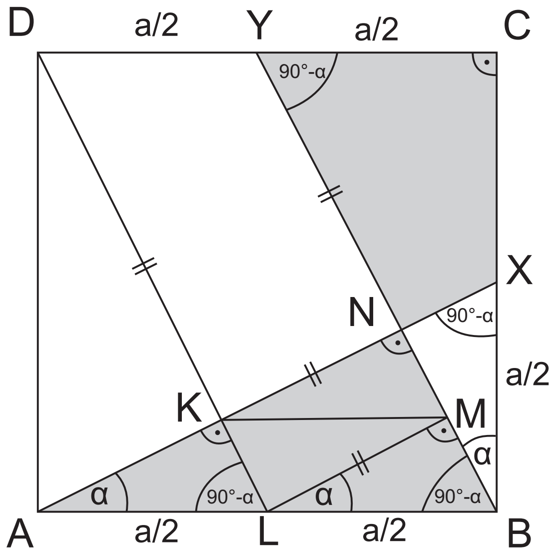
Odpoveď: Pozri tabulku 4.

umiestnenie	štát	víťazstvá	remízy	prehry	skóre	body
2.	Francúzsko	1	1	1	2:3	3
3.	Anglicko	0	2	1	2:3	2
1.	Taliansko	3	0	0	6:2	6
4.	Nemecko	0	1	2	1:3	1

Tabuľka 4: Doplnená tabuľka zo zadania

Komentár: Väčšina z vás, čo ste príklad riešili, ste ho vyriešili správne. Aj keď niekoľkým sa podarili preklepy vo výslednej tabuľke. Za ne sme však body nestrhávali. Niekoľkým sme strhli bod za chýbajúce vysvetlenie, prečo museli streliť Taliani Angličanom iba 2 góly. Za chýbajúci postup sme strhli 7 bodov. Ak ho mal niekto iba nekompletný, tak stratil prirodzene menej bodov. Ak sa niekto dostal k nesprávnemu výsledku, dostal 1 až 5 bodov podľa toho, akú časť postupu mal v poriadku.

Príklad č. 8 (opravovali Zuzka, Juro, Palo):
A (okrem Gamče): Štvorec (obrázok 4) si označíme $ABCD$, stred strany BC bude X, stred strany CD nech je Y a priesečník úsečiek AX a BY označíme N. Dĺžku strany štvorca si označíme ako a. Uhol CBY označíme α, keďže uhol BCD je pravý ($ABCD$ je štvorec), tak $|\sphericalangle CYB| = 90^\circ - \alpha$. Trojuholníky ABX a BCY sú zhodné ($|AB| = |BC| = a$, $|BX| = |CY| = \frac{a}{2}$, $|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle BCY| = 90^\circ$), čiže platí $|\sphericalangle CBY| = |\sphericalangle BAX| = \alpha$ a $|\sphericalangle CYB| = |\sphericalangle BXA| = 90^\circ - \alpha$. Keďže $|\sphericalangle CBY| = \alpha$ a $|\sphericalangle XBA| = 90^\circ$, tak $|\sphericalangle NBA| = 90^\circ - \alpha$. $|\sphericalangle BNA| = 180^\circ - |\sphericalangle NBA| - |\sphericalangle BAN| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$. Do obrázka si teraz dokreslíme rovnobežku s úsečkou YB, ktorá prechádza bodom D. Priesečník tejto rovnobežky a strany štvorca AB označíme L. Keďže YB a DL su rovnobežky, tak $|\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle AKL| = 90^\circ$. Vieme, že $|DY| = \frac{a}{2}$, $DC \cong AB$ (strany štvorca) a $YB \cong DL$, takže bude platiť, že $|LB| = \frac{a}{2}$. Keďže $YB \cong DL$, tak $|\sphericalangle YBA| = |\sphericalangle DLA| = 90^\circ - \alpha$ (striedavé uhly). Ešte dokreslíme takú rovnobežku s úsečkou AX, ktorá bude prechádzať bodom L, jej priesečník s úsečkou YB označíme M. $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle MLB| = \alpha$ (striedavé uhly).



Obrázok 4: Náš štvorec

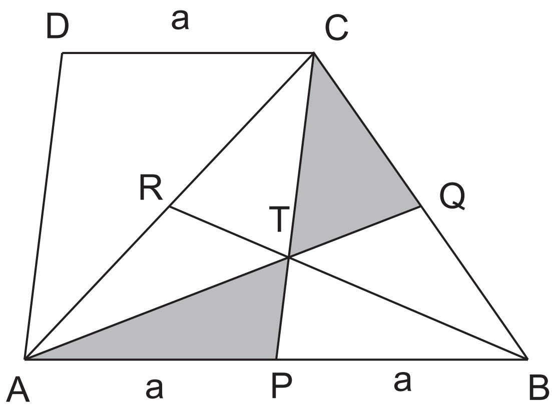
Keď sa na obrázok lepšie pozrieme, tak hneď odhalíme tri zhodné trojuholníky a to BXN, LBM, ALK (všetky tieto trojuholníky majú základňu rovnú $\frac{a}{2}$ a rovnaké uhly). Všimnite si, že štvoruholník $KLMN$ je vlastne obdĺžik a jeho strany majú rovnakú dĺžku ako odvesny našich troch zhodných trojuholníkov. Čiže keby sme ho rozdelili uhlopriečkou (napr. KM) napoly, tak by sme dostali ďalšie dva trojuholníky, ktoré sú zhodné s trojuholníkom BXN (čiže majú aj rovnaký obsah). Takže trojuholník XAB sme rozdelili na 5 zhodných trojuholníkov,jeden z nich je biely a štyri sú vyšrafované. Keďže obsah trojuholníka ABX je rovný $\frac{1}{4}$ obsahu štvorca $\left(\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}\right)$ a skladá sa z piatich zhodných malých trojuholníkov, tak celý štvorec by mal obsah ako 20 malých trojuholníkov. Vieme, že trojuholník CBY je zhodný s trojuholníkom BAX, takže obsah štvoruholníka $CXNY$ je rovný štvornásobku obsahu trojuholníka XBN, tento štvoruholník je celý vyšrafovaný.

Čiže celkovo je vyšrafovaných 8 trojuholníkov z 20, takže 8 trojuholníkov je vyžrafovaných a 12 je bielych. (Ešte pripomínam, že všetky tieto trojuholníky majú rovnaký obsah, dúfam, že ste nezabudli.) Takže pomer obsahov vyšrafovanej a bielej časti je $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Odpoveď: Pomer vyfarbenej a nevyfarbenej časti štvorca je 2:3

B (pre Gamču): Vieme, že jedna zo základní lichobežníka (obrázok 5 je 2krát väčšia ako druhá. Úlohu si teda rozdelíme na dve časti.
1. časť: Ak $|AB| = 2|DC|$
Pod drobnohľad si najskôr zoberieme trojuholník ABC. Bod P leží v strede strany AB, čiže CP musí byť ťažnicou (spája vrchol a stred protiľahlej strany trojuholníka). Bod Q leží v strede strany BC, čiže aj AQ je ťažnicou trojuholníka. Priesečník týchto ťažníc si označíme T – áno, je to ťažisko trojuholníka ABC. Ešte si do obrázka dokreslíme poslednú ťažnicu trojuholníka a stred strany AC si označíme R.

Teraz využijeme vlastnosť ťažníc, ktorú nás v škole isto naučili (no ale i tak si to môžete skúsiť dokázať, je to veľmi jednoduché. Skúste pouvažovať nad tým, ktoré trojuholníky majú rovnaký obsah.) a to, že ťažnice rozdeľujú trojuholník na šesť častí s rovnakým obsahom. Tento obsah si označíme S. Takže obsah šedých častí je spolu rovný $2S$ a obsah bielych častí v trojuholníku ABC je rovný $4 \cdot S$.

Trojuholník ABC má dvakrát väčší obsah ako trojuholník DCA, pretože základňa AB je dvakrát väčšia ako základňa CD druhého trojuholníka a výšky v týchto trojuholníkoch sú rovnako dlhé (keďže $ABCD$ je lichobežník, tak AB je rovnobežné s DC). Keďže mal trojuholník ABC obsah $6 \cdot S$, tak trojuholník CDA bude mať obsah $3 \cdot S$ (ešte pre istotu si pripomenieme, že celý trojuholník CDA je biely).



Obrázok 5: ... už viem, predsa lichobežník

Tak a teraz vypočítame pomer obsahu šedej a bielej časti lichobežníka:

$$\frac{2 \cdot S}{4 \cdot S + 3 \cdot S} = \frac{2}{7}$$

2. časť: Ak $2|AB| = |DC|$
V tomto prípade postupujeme podobne ako v prvom. No rozdiel nastane, keď sa snažíme porovnať obsahy trojuholníkov ABC a CDA. Keďže teraz $2|AB| = |DC|$, tak obsah trojuholníka je dvakrát väčší ako obsah trojuholníka ABC. Trojuholník ABC má obsah $6 \cdot S$, teda trojuholník CDA bude mať obsah $12 \cdot S$ (pre istotu si znova pripomenieme, že celý trojuholník CDA je biely).

Nakoniec vypočítame pomer obsahu šedej a bielej časti lichobežníka:

$$\frac{2 \cdot S}{4 \cdot S + 12 \cdot S} = \frac{1}{8}$$

Odpoveď: Pomer vyfarbenej a nevyfarbenej časti lichobežníka je 2:7 (Ak $|AB| = 2|DC|$) alebo 1:8 (Ak $2|AB| = |DC|$).
Komentár: Túto úlohu ste zvládli pomerne dobre, no skutočne úžasných 10 bodových riešení bolo len pár. V príklade 8B sme za úplne správne vyriešenie prvej časti dávali 6 bodov a za vyriešenie druhej časti 3 body (A to preto, že úlohy boli postupom riešenia veľmi podobné, takže keď ste vypočítali prvú časť, druhú by ste už mali zvládnuť ľahko. No našli sa aj takí, ktorí druhú časť neriešili.) Za počítanie pomeru obsahu vyfarbenej časti a celého lichobežníka sme strhávali 1 bod. Za nedostatočné zdôvodnenie toho, že trojuholník CDA má polovičný (resp. dvojnásobný) obsah ako ABC 1 až 2 body. Pri opravovaní príkladu 8B sme ku každému riešeniu pristupovali individuálne, keďže ich bolo tak málo. ...

Príklad č. 9 (opravovali Natali, Sasho):

Prvé, čo si musíme uvedomiť je, že body P, Q, R ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC. (Pozeraj na obrazok **??**) Trom bodom P, Q, R vieme opísať iba jednu kružnicu. Preto kružnica opísaná trojuholníku PQR je tá istá ako spomínaná opísaná kružnica trojuholníku ABC.

Zopakujme si, čo ešte vieme o bodoch P, Q, R zo zadania:

- P má ležať na priamke výšky na stranu AB
- Q má ležať na priamke osi uhla pri vrchole C
- R má ležať na priamke ťažnice na stranu AB

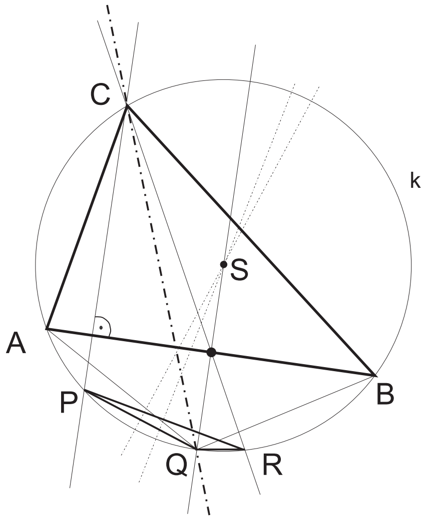
V našom ďalšom postupe bude skrytý návod, ako zostrojiť trojuholník ABC.

Pomocou osí strán trojuholníka PQR nájdeme stred S kružnice k opísanej trojuholníkom PQR aj ABC. Vieme, že body A, B, C ležia niekde na tejto kružnici.

Priamka CQ je os uhla pri vrchole C, a teda veľkosť uhla ACQ je rovná veľkosti uhla BCQ. Z pomôcky v zadaní teda vieme, že platí $AQ = BQ$. Trojuholník ABQ je teda rovnoramenný.

V rovnoramennom trojuholníku prechádza os základne tretím vrcholom, čiže os úsečky AB prechádza bodom Q. Body A, B ležia na kružnici k, takže os úsečky AB prechádza aj stredom S. Z toho vidíme, že priamka SQ musí byť os AB a teda je na ňu kolmá. Vieme, že aj výška z bodu C (priamka CP) je kolmá na AB, takže priamky SQ a CP sú rovnobežné. Spravíme si teda rovnobežku s SQ prechádzajúcu bodom P. Tam, kde táto priamka pretne kružnicu k spravíme bod C.

Vieme, že ťažnica z bodu C prechádza stredom strany AB, teda stred strany AB leží na priamke CR. Keďže priamka SQ je osou úsečky AB, stred strany AB leží tiež niekde na priamke SQ. Vieme ho teda zostrojiť ako prienik priamok SQ a CR. Strana AB je kolmá na priamku CP, teda keď spravíme kolmicu na CP cez nájdený stred strany AB, miesta kde nám táto kolmica pretne kružnicu k sú body AB. Máme trojuholník ABC.
Komentár: I keď je pravda, že zadanie znelo troška hrozivo, stačilo nad tým príkladom len chvíľku posedieť a veľa z vás by sa dopracovalo k správnemu riešeniu. Taktiež by sme chceli podotknúť, že nemusíte mať celé riešenie na to, aby ste ho poslali. Pošlite to, na čo ste prišli. Preto píšete postupy, aby sme vám obodovali jednotlivé myšlienky!

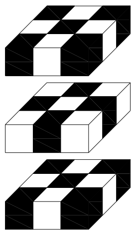


Obrázok 6: Od bodov k trojuholníku...

Prémia (opravovali Danka, Uľa):

Zadanie: Kus syra v tvare kocky je rozdelený na $3 \times 3 \times 3$ rovnakých malých kociek. Myš začne jesť rožnú kocku. Po zjedení hociktorej malej kocky pokračuje s niektorou stenou priľahlou kockou. Je možné, aby zjedla všetkých 27 kociek a pritom ako poslednú zjedla malú kocky v strede veľkej kocky?

Riešenie: Jednotlivé malé kocky si zafarbíme na čierno a bielo tak, aby kocky dotýkajúce sa stenami boli rôznych farieb. Teda keď myška zje kocku bielej farby, nasledujúca kocka, ktorú zje, bude čiernej farby, bez ohľadu na to, ktorým smerom sa vyberie.



Obrázok 7: Zafarbená kocka rozkrojená na 3 poschodia

Na obrázku 7 vidíte zafarbenie kocky, ktorú sme pre lepšiu prehľadnosť rozkrojili na všetky tri poschodia. Po zafarbení sme dostali 14 čiernych a 13 bielych kociek. Myška začne jesť ako prvú rožnú kocku. Keďže kocka je stredovo aj osovo súmerné teleso, nezáleží na tom, ktorú zo štyroch rožných kociek si vyberie ako začiatočnú.

Syr pozostáva z 27 malých kociek. Kocka, ktorú zje ako prvú, je čiernej farby. Druhá kocka je biela, tretia je čierna, ... ďalej sa to strieda až po 27-mu kocku. Všimnime si, že kocky, ktorých poradové čísla sú nepárne sú čiernej farby a kocky, ktorých poradové čísla sú párne sú bielej farby. Z toho vidíme, že posledná kocka by mala byť tiež čierna. Ale na obrázku je práve táto stredová kocka (2.podlažie v strede) biela. A preto táto úloha nemá riešenie.

Na záver sa ešte skúsme zamyslieť, či sme náhodou nespravili chybu. Napríklad, pokiaľ by existovalo iné zafarbenie kociek, v ktorom by rožné kocky mohli mať aj rôzne farby, razom by naše tvrdenie neplatilo. Ale práve vďaka symetrii veľkej kocky nič také nenastane. Stačí si skontrolovať, že v hornom podlaží rožné kocky musia byť vždy rovnakej farby a uvedomiť si, že rovnako to bude aj v bočných stenách a v spodnom podlaží. Vždy sa teda dostaneme k takému zafarbeniu, ako je na obrázku. A teda skutočne nezáleží, z ktorého rohu začne myška jesť syr, prostrednou kockou skončiť nemôže.

Skúste porozmýšľať, či by existovalo riešenie, keby myška nezačínala v rohu :).

Odpoveď: Úloha nemá riešenie.

Komentár: Väčšina z vás prišla na to, že riešenie neexistuje. Vaše vysvetlenia však až na pár výnimiek neboli úplne dotiahnuté do konca. Odpovede, že ste skúšali a nenašli riešenie, nám žiaľ nestačili. Niektorí ste sa z nepozornosti pomýlili v obrázkoch alebo v úvahách a preto vám riešenie vyšlo. Bod ste od nás získali za správne riešenie a ďalších päť za vysvetlenie. Bodovali sme aj každé správne zistenie, ktoré ste napísali. Prajeme veľa ďalších úspechov a nezabúdajte si vždy príklad po sebe skontrolovať...