Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2008/2009

Príklad č. 1 (opravovali Peťo, Juro):

Zo zadania vieme, že gulička sa zastavila na čísle deliteľnom tromi, čiže to číslo je násobkom čísla tri. Teraz si vypíšeme všetky násobky trojky, čo sa nachádzajú na rulete. Sú to čísla 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33 a 36. Ďalej vieme, že číslo, na ktorom sa zastavila gulička je tiež nepárne, čiže z čísel, ktoré sú násobkami trojky (viď. vyššie) vyškrtneme všeky, ktoré sú párne. Zostanú nám čísla 3, 9, 15, 21, 27 a 33. Vieme, že ciferný súčet toho čísla je číslo medzi štyrmi a ôsmimi. Teraz zistíme, ktoré zo zvyšných čísel majú ciferný súčet medzi štyrmi a ôsmimi:

čísla	3	9	15	21	27	33
cifenrý súčet	3	9	6	3	9	6

Vidíme, že nám zostali už iba čísla 15 a 33. V zadaní je ešte posledná informácia, že súčin cifier čísla, na ktorom sa zastavila gulička, je medzi štyrmi a ôsmimi. Teraz si zistíme, ktoré z čísel 15 a 33 má súčin cifier medzi štyrmi a ôsmimi. Súčin cifier čísla 15 je 5 a to znamená, že toto číslo to môže byť. Súčin cifier čísla 33 je 9, čiže toto číslo to nemôže byť. Jediné číslo, ktoré nám zostalo je číslo 15, takže na tomto čísle zastala gulička.

Odpoveď: Gulička zastala na čísle 15.

Komentár: Príklad ste zvládli všetci bez väčších ťažkostí.

Príklad č. 2 (opravovala natali):

Vieme, že obsahy všetkých Monikiných štvorcov sú trojciferné čísla. Začneme tým, že nájdeme všetky možné obsahy. Obsah štvorca so stranou a vypočítame ako $S = a \cdot a$. Takže vypisujeme, začneme číslom 100:

$$\begin{array}{lll}
10 \cdot 10 = 100 & 18 \cdot 18 = 324 & 26 \cdot 26 = 676 \\
11 \cdot 11 = 121 & 19 \cdot 19 = 361 & 27 \cdot 27 = 729 \\
12 \cdot 12 = 144 & 20 \cdot 20 = 400 & 28 \cdot 28 = 784 \\
13 \cdot 13 = 169 & 21 \cdot 21 = 441 & 29 \cdot 29 = 841 \\
14 \cdot 14 = 196 & 22 \cdot 22 = 484 & 30 \cdot 30 = 900 \\
15 \cdot 15 = 225 & 23 \cdot 23 = 529 & 31 \cdot 31 = 961 \\
16 \cdot 16 = 256 & 24 \cdot 24 = 576 & 32 \cdot 32 = 1024 \\
17 \cdot 17 = 289 & 25 \cdot 25 = 625 &
\end{array}$$

Ďalej už netreba pokračovať, pretože všetky ďalšie obsahy budú aspoň štvorciferné.

Teraz si uvedomíme, že Monika pri zápise obsahov použila každú z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 práve raz. Takže obsahy, v ktorých sa nejaké číslice opakujú, môžeme vynechať. Zostane nám týchto 13 čísel: 169, 196, 256, 289, 324, 361, 529, 576, 625, 729, 784, 841, 961.

Všimnime si, že číslica 3 sa nachádza len v dvoch číslach a to 324 a 361. Vyskúšame teda obidve možnosti. Povedzme, že jeden z Monikiných obsahov je 324. Vo zvyšných dvoch číslach sa nesmú nachádzať číslice 2, 3 ani 4. Pozrime sa teraz na číslicu 8. Nachádza sa v číslach 289, 784 a 841. Lenže v každom z týchto čísel sa nachádza aj číslica 2 alebo 4, takže žiadne nemôžeme použiť. Táto možnosť nevyhovuje, pretože by sme nemohli použiť každú číslicu práve raz.

Teraz skúsme použiť číslo 361. Vo zvyšných dvoch číslach sa už nesmie nachádzať žiadna z číslic 3, 6 a 1. Všimnime si číslicu 5. Nachádza sa v číslach 256, 529, 576 a 625. Tri z týchto čísel obsahujú aj číslicu 6, takže ako jediná možnosť zostáva 529. K dvom číslam 361 a 529 potrebujeme tretie, zložené z číslic 4, 7 a 8. Jediné také je 784.

Odpoveď: Monikine štvorce mali obsahy 361, 529 a 784.

Komentár: Väčšina z vás zvládla túto úlohu výborne, gratulujem :). Chcem vás ale upozorniť na jednu vec. V príkladoch nestačí nájsť jedno riešenie, treba ich nájsť všetky. A tiež ukázať, že ďalšie už určite nie sú . . .

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Sasho):

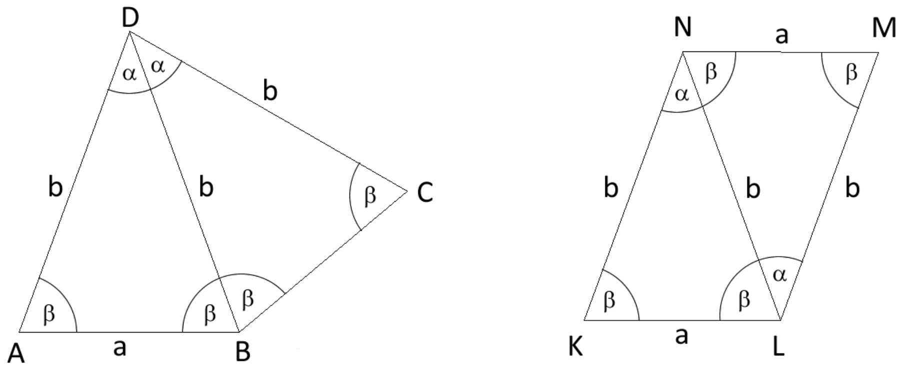
A (okrem Gamče): Našou úlohou bolo nájsť všetkých 6 päťuholníkov, ktoré môžeme dostať spojením troch zhodných, rovnoramenných trojuholníkov. Na to, aby sme našli skutočne všetky, je dobré mať v hľadaní nejaký systém. Najprv spojíme dvojice trojuholníkov a k nim budeme neskôr pripájať tretí trojuholník. Ak chceme, aby bol výsledný útvar päťuholník, musí mať aspoň jedna dvojica trojuholníkov jedno spoločné rameno. Preto prvé dva trojuholníky spojíme ramenami. To môžeme urobiť práve dvomi spôsobmi (vidíme na obrázku 1).

Takto sme dostali dva štvoruholníky. Po pridaní trojuholníka z nich majú vzniknúť päťuholníky, preto máme dve možnosti ako to urobiť:

1. Výsledný päťuholník bude mať štyri zhodné vrcholy s pôvodným štvoruholníkom a jeden navyše. Ak to chceme docieliť, musíme trojuholník pridať tak, aby mal s pôvodným štvoruholníkom spoločnú jednu celú stranu. Zároveň však nemôže pri žiadnom z pôvodných vrcholov vzniknúť priamy uhol (uhol s veľkosťou 180°), lebo potom by tento uhol už nebol vrcholom výsledného útvaru, ale len bodom na jednej zo strán nového štvoruholníka.

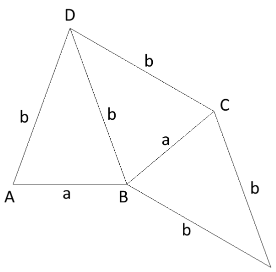
2. Výsledný päťuholník bude mať s pôvodným štvoruholníkom len tri zhodné vrcholy a dva navyše. Štvrtý vrchol štvoruholníka už nebude vrcholom, pretože pri ňom vznikne priamy uhol a bude iba ležať na jednej zo strán päťuholníka.

Najprv budeme k štvoruholníku $ABCD$ pridávať trojuholník podľa prvej možnosti. Ak prilepíme tretí trojuholník k strane AB jeho základňou dostaneme naozaj päťuholník, ktorý môžete vidieť na obrázku č.2. K strane BC ho môžeme prilepiť

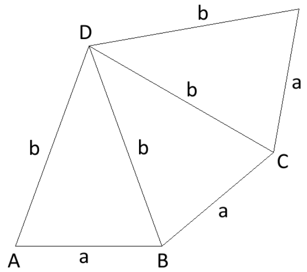


Obrázok 1: základné štvoruholníky

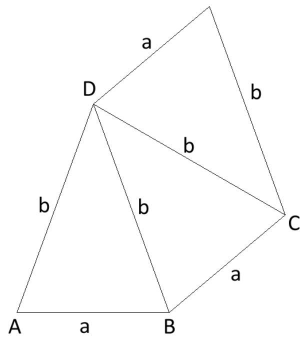
jeho ramenom dvoma spôsobmi. Pri oboch z nich dostaneme päťuholník. Môžete ich vidieť na obrázkoch č.3 a 4. Keďže štvoruholník $ABCD$ je osovo súmerný, podľa osi DB, pripájaním trojuholníka k stranám CD a AD dostaneme päťuholníky osovo súmerné, to znamená, že budú zhodné s tými, čo už máme.



Obrázok 2: prvý päťuholník



Obrázok 3: druhý päťuholník



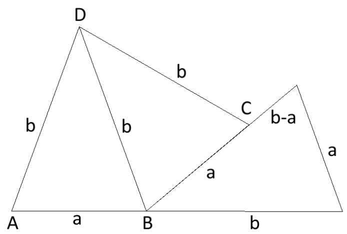
Obrázok 4: tretí päťuholník

Teraz skúsime trojuholník pridať druhým spôsobom. Ak k nášmu štvoruholníku pridáme ďalší trojuholník, tak pri niektorom z bodov A, B, C alebo D musí byť uhol rovný 180° (priamy uhol). Ďalej vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je rovný 180°. V našom prípade je to $\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Teraz už vieme, že priamy uhol pri niektorom z vrcholov štvoruholníka budú tvoriť uhly α, β a β. Pridaním jedného trojuholníka môžeme uhol pri niektorom z vrcholov štvoruholníka zväčšiť o α, alebo β. Priamy uhol môže vzniknúť iba pri takom uhle štvoruholníka, ktorý má veľkosť $\alpha + \beta$, alebo 2β. V našom prípade, sú to body B a L. V prvom štvoruholníku je to uhol $\sphericalangle ABC$ (má veľkosť 2β). Ak tento štvoruholník doplníme pridaním trojuholníka do priameho uhla, opäť nám vznikne päťuholník, ktorý možete vidieť na obrázku č. 5. V skutočnosti sa to dá dvoma spôsobmi, ale opäť by vyšli iba dva osovo súmerné päťuholníky, preto stačí keď uvažujeme o jednom.

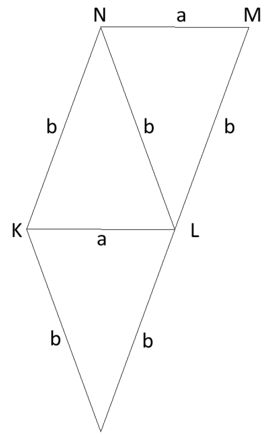
Ostáva nám ešte overiť štvoruholník $KLMN$. Opäť začneme prvou možnosťou. Ak prilepíme tretí trojuholník k jeho strane KL, uhol pri bode L bude mať veľkosť 180°. Potom bod L nebude vrcholom a vznikne štvoruholník (obr. č.6). K strane LM môžeme pripojiť tretí trojuholník jeho ramenom dvoma spôsobmi. Pri jednom z nich dostaneme opäť iba štvoruholník (obr. č.7), pretože aj v tomto prípade je pri bode L priamy uhol a preto nie je vrcholom. Pri druhom síce dostaneme päťuholník (obr. č.8), ale ten je zhodný s už nájdeným päťuholníkom č. 3. Keďže štvoruholník $KLMN$ je stredovo súmerný, tak pripájaním trojuholníka k stranám MN a NA dostaneme útvary stredovo súmerné, teda zhodné s tými, ktoré sme už našli.

Nakoniec budeme pripájať trojuholník k štvoruholníku $KLMN$ druhým spôsobom. V tomto štvoruholníku máme dva uhly veľkosti $\alpha + \beta$. Keďže je ale stredovo súmerný, stačí keď sa budeme zaoberať jedným z týchto uhlov (pri druhom by sme dostali rovnaké možnosti). Uhol $\sphericalangle KLM$ je možné doplniť do priameho uhla až štyrmi spôsobmi. Pri dvoch z nich má prikladaný trojuholník so štvoruholníkom spoločnú celú stranu a preto dostaneme štvoruholníky, ktoré sme dostali aj pri prvej možnosti pripájania(obr. č.7 a 6). Zostávajú nám dva spôsoby. Pri prvom trojuholník priložíme jeho ramenom k strane štvoruholníka, ktorá má dĺžku ako základňa trojuholníka (obr. č. 9). Pri druhom, naopak, základňu trojuholníka priložíme k strane štvoruholníka s dĺžkou ramena trojuholníka (obr. č. 10). V oboch prípadoch vzniknú päťuholníky. Tým sme vyčerpali všetky možnosti skladania a našli sme naozaj šesť rôznych päťuholníkov.

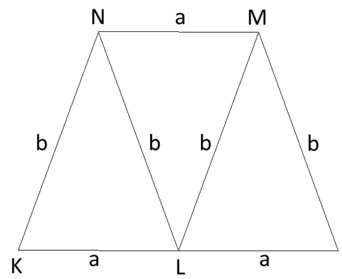
B (pre Gamču): Prvá časť úlohy, teda hľadanie päťuholníkov bola rovnaká ako v úlohe 3A. V druhej časti ste mali zistiť dĺžky strán trojuholníkov. Dĺžku základne trojuholníka si označíme a a dĺžku jeho ramena označíme b. Keď si pomocou týchto dvoch neznámych označíme dĺžky strán päťuholníkov, zistíme, že štyri z nich majú obvod $a + 4b$ a dva $3a + 2b$. Podľa zadania

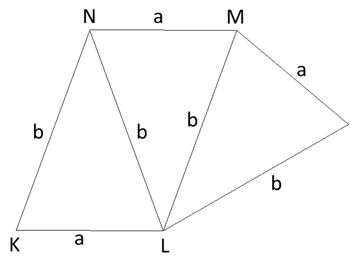


Obrázok 5: štvrtý päťuholník



Obrázok 6: vzniknutý štvoruholník





Obrázok 8: päťuholník zhodný s tre-

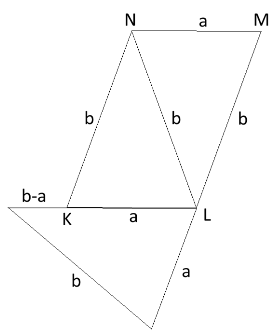
Obrázok 7: 2. vzniknutý štvoruholníktím

platí:

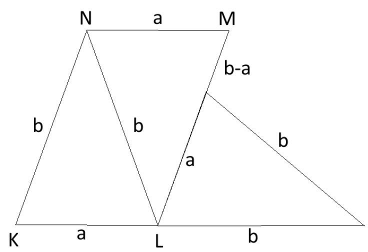
$$\begin{aligned} a + 4b &= 23 \\ 3a + 2b &= 19 \end{aligned}$$

Po odčítaní $4b$ z prvej rovnice dostaneme $a = 23 - 4b$. Teraz môžeme dosadiť za a do druhej rovnice:

$$\begin{aligned} 3(23 - 4b) + 2b &= 19 \\ 69 - 12b + 2b &= 19 \\ -10b &= -50 \\ b &= 5 \end{aligned}$$



Obrázok 9: piaty päťuholník



Obrázok 10: šiesty päťuholník

Nakoniec dosadíme do prvej rovnice za b:

$$\begin{aligned} a + 4 \cdot 5 &= 23 \\ a + 20 &= 23 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Trojuholníky majú dĺžku základne 3 a dĺžku ramien 5, z čoho je už jednoduché dopočítať dĺžky strán päťuholníkov.
Komentár: Príklad bol dosť náročný. Takmer nikto z vás nám nenapísal spôsob, akým päťuholníky hľadal. Zrejme to bolo spôsobené aj tým, že viacerí ho ani nemali a preto nenašli všetky riešenia. Takisto veľa z vás robilo chybu, že ste si neoverili, či útvary, ktoré ste našli boli naozaj päťuholníkmi. Pritom to, že niektorý váš útvar je štvoruholník, ste mohli zbadať väčšinou aj z kvalitného náčrtku. Niektorí zas našli niekoľko zhodných päťuholníkov, ktoré pokladali za rôzne. Keby ste sa nezastavili pri šiestich nájdených päťuholníkoch, ale snažili by ste sa nájsť ďalšie, tak by ste si tieto svoje chyby mohli všimnúť.

V príklade 3A sme dávali bod za každý nájdený päťuholník, bod za vysvetlenie, prečo sú to naozaj päťuholníky a 1 až 3 body za postup ich hľadania.

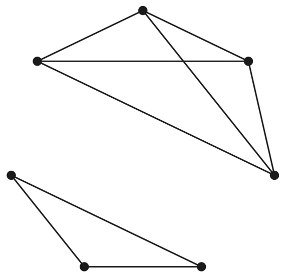
V príklade 3B sme dávali za nájdené päťuholníky o bod menej ako bol ich počet, bod za vysvetlenie prečo sú to naozaj päťuholníky a 1 bod za postup ich hľadania, 1 bod za dĺžky strán a 2 body za ich výpočet.

Príklad č. 4 (opravovala Monča):

Zo zadania vieme, že dve mestá nemôžu nadviazať spojenie. To sa však mohlo stať len v prípade, keď sú mestá rozdelené na dve neskontaktované časti a to na 3 a 4 mestá, 2 a 5 miest, alebo 1 a 6 miest. Ľubovoľné spojenie medzi týmito časťami by spôsobilo možnosť dovolať sa z každého mesta do každého.

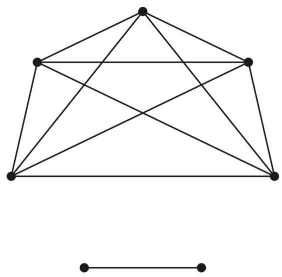
Pozrime sa bližšie na jednotlivé prípady.

Ak budú mestá rozdelené na 3 a 4, maximálny počet položených káblov bude 9 (pozri obrázok 11). Hocijaký kábel navyše by spôsobil, že každé mesto by sa vedelo spojiť s každým. Pre tento prípad nevyhovuje ani možnosť a) a ani možnosť b).



Obrázok 11: 3 a 4 mestá

Ak mestá rozdelíme na 2 a 5, maximálny možný počet položených káblov bude 11 (pozri obrázok 12). Tak ako v prvom prípade, ak pridáme ďalší kábel, budú sa vedieť navzájom spojiť všetky mestá. Preto opäť nevyhovuje žiadna možnosť.



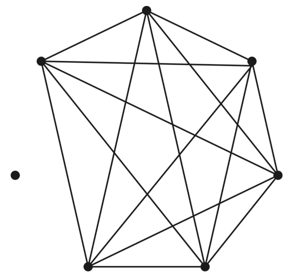
Obrázok 12: 2 a 5 miest

Pri rozdelení 1 a 6, bude maximálny počet položených káblov 15 (pozri obrázok 13). Spojárom sa preto mohlo podariť nespojiť dve mestá v prípade a). Ak by sme však chceli pridať ďalší, 16-ty kábel, všetky mestá by sa navzájom dokázali spojiť. Preto sa im to v prípade b) nemohlo stať.
Odpoveď: Spojárom sa to mohlo stať v prípade a), ale v prípade b) nie.
Komentár: Na riešenie ste väčšinou prišli. Niekedy boli problémy v tom, že ste neodôvodnili rozdelenie miest a inokedy ste akosi zabudli na prípad b). Príkladu ste však rozumeli a vyriešili ste ho veľmi pekne, len tak ďalej.

Príklad č. 5 (opravovali Betka, Lucka):

Zadanie:

1. Vrana hniezdi na buku.



Obrázok 13: 1 a 6 miest

	1	2	3	4	5
strom			buk		
meno			Anton		
klub					futbal
vták			vrana		
rok					1974

Tabuľka 1: zaznamenanie bodov 6, 8 a 1

2. Lipa bola zasadená dva roky nato, čo zasadil strom golfový klub.
3. Červienka je na strome, ktorý zasadil bowlingový klub, a tento strom je vedľa stromu zasadeného futbalovým klubom.
4. Jakub zasadil strom v roku 1971.
5. Škorec žije na topoli, ktorý zasadil Daniel v roku 1974.
6. Anton zasadil prostredný strom a bol to buk.
7. Sova býva na Borisovom strome, ktorý je vedľa jaseňa.
8. Strom úplne napravo bol zasadený v roku 1974 futbalovým klubom.
9. Brest bol zasadený v roku 1970.
10. Tenisový klub zasadilo strom v roku 1972.
11. Squashový klub zasadil strom v roku 1970.
12. Silvester zasadil strom roku 1973 a žije na ňom červienka.
13. Drozd hniezdi na strome, ktorý zasadil Jakub.
14. Strom, na ktorom sídli sova je zasadený naľavo od stromu, ktorý zasadil Jakub.

Riešenie: Pre prehľadnejšie riešenie si nakreslíme tabuľku. Jednotlivé čísla predstavujú poradie stromov sprava doľava. Postupne do tabuľky budeme zapisovať informácie zo zadania.

Podľa bodu 6. zasadil Anton prostredný strom a bol to buk. Podľa bodu 8. bol strom úplne napravo zasadený v roku 1974 futbalovým klubom. Podľa bodu 1. hniezdi vrana na buku. Po týchto krokoch tabuľka vyzerá ako Tabuľka 1.

Podľa bodu 3. je červienka na strome, ktorý zasadil bowlingový klub a tento strom je vedľa stromu zasadeného futbalovým klubom. Podľa bodu 5. žije škorec na topoli, ktorý zasadil Daniel v roku 1974. Podľa bodu 12. zasadil Silvester strom roku 1973 a žije na ňom červienka. Teraz tabuľka vyzerá ako Tabuľka 2.

Podľa bodu 14. je strom, na ktorom sídli sova zasadený naľavo od stromu, ktorý zasadil Jakub. Jakub, môže zasadiť už iba stromy na miesta 1 a 2. Keďže naľavo od tohto stromu má byť ešte jeden, Jakub musí zasadiť strom na mieste 2. Opäť poznačíme do Tabuľky 3.

Podľa bodu 4. zasadil Jakub strom v roku 1971. Podľa bodu 7. býva sova na Borisovom strome, ktorý je vedľa jaseňa. Podľa bodu 13. hniezdi drozd na strome, ktorý zasadil Jakub. Naše momentálne vedomosti teraz vystihuje Tabuľka 4.

	1	2	3	4	5
strom			buk		topoľ
meno			Anton	Silvester	Daniel
klub				bowling	futbal
vták			vrana	červienka	škorec
rok				1973	1974

Tabuľka 2: zaznamenanie bodov 3, 5 a 12

	1	2	3	4	5
strom			buk		topoľ
meno		Jakub	Anton	Silvester	Daniel
klub				bowling	futbal
vták	sova		vrana	červienka	škorec
rok				1973	1974

Tabuľka 3: zaznamenanie bodu 14

	1	2	3	4	5
strom		jaseň	buk		topoľ
meno	Boris	Jakub	Anton	Silvester	Daniel
klub				bowling	futbal
vták	sova	drozd	vrana	červienka	škorec
rok		1971		1973	1974

Tabuľka 4: zaznamenanie bodov 4, 7 a 13

Podľa bodu 2. bola lipa zasadená dva roky nato, čo zasadil strom golfový klub. Ak bola lipa zasadená dva roky po ktoromkoľvek strome, tak do úvahy prichádzajú tri roky : 1972, 1973, 1974 (ten strom, po ktorom bola zasadená 2 roky mohol byť zasadený najskôr 1970). Rok 1974 je už obsadený topoľom. Podľa 11. bodu zadania zasadil strom v roku 1970 squashový klub. A preto lipa nemohla byť zasadená ani v roku 1972, pretože v roku 1970 zasadil strom squashový klub a nie golfový. Zostal už iba rok 1973 a potom golfový klub zasadil strom v roku 1971. Tak isto už zostal iba jeden strom - brest. Aj tieto informácie sme zapísali do Tabuľky 5.

Podľa bodu 9. bol brest zasadený v roku 1970. Podľa bodu 11. zasadil squashový klub strom v roku 1970. Podľa bodu 10. zasadil tenisový klub strom v roku 1972. Po pridaní týchto informácii dostaneme Tabuľku 6.

Odpoveď: Tabuľka 7.

Komentár: Príklad nebol príliš ťažký. Takmer všetci mali správny výsledok. Body sme strhávali iba za postup.

Príklad č. 6 (opravovali Kozzy, Murko):

Vieme, že na konci máme na všetkých troch kôpkach rovnaký počet mincí, zatiaľ však nevieme aký, preto si ho označíme x. Príklad budeme riešiť od konca. Zostavíme si tabuľku (viď. tabuľka 8).

Vieme, že tento počet sme dostali premiestnením mincí z tretej kôpky na prvé dve tak, že počet mincí na nich sa zdvojnásobil. Pred premiestnením bolo na prvej aj na druhej kôpke o polovicu mincí menej, teda $\frac{x}{2}$. Na tretej kôpke bolo po druhom premiestnení o toľko mincí viac ako na konci, koľko mincí sme pridali na prvé dve kôpky dokopy, teda $x+(x-\frac{x}{2})+(x-\frac{x}{2}) = 2x$. Doplnili sme našu tabuľku (viď. tabuľka 9).

Tento počet sme dostali premiestnením mincí z druhej kôpky na prvú a tretiu tak, že počet mincí na nich sa opäť zdvojnásobil. Na prvej kôpke bola pred druhým premiestnením polovica mincí ako po ňom, teda $\frac{\frac{x}{2}}{2} = \frac{x}{4}$ a rovnako, na tretej $\frac{2x}{2} = x$. Na druhej kôpke bolo predtým o toľko viac, koľko mincí sme pridali na druhé dve kôpky dokopy, teda $\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)+(2x - x) = \frac{7x}{4}$ Aj tieto výsledky si zapíšeme do tabuľky (viď. tabuľka 10).

Tento počet sme dostali premiestnením mincí z prvej kôpky na druhú a tretiu tak, že počet mincí na nich sa zdvojnásobil. Na začiatku bola teda na druhej kôpke polovica z počtu mincí po prvom premiestnení, teda $\frac{\frac{7x}{4}}{2} = \frac{7x}{8}$ a rovnako na tretej $\frac{x}{2}$. Na prvej kôpke bolo na začiatku o toľko mincí viac ako po prvom premiestnení, koľko mincí sme premiestnili na druhú a tretiu kôpku spolu, čo je $\frac{x}{4} + \left(\frac{7x}{4} - \frac{7x}{8}\right) + \left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{13x}{8}$. Teraz už môžeme doplniť tabuľku aby bola kompletná (viď. tabuľka 11).

Keďže počet mincí je prirodzené číslo, $\frac{7x}{8}$ a $\frac{13x}{8}$ musia byť celé čísla. Keďže čísla 13 a 8 sú nesúdeliteľné, musí byť x deliteľné 8. Celkový počet mincí je $3x$, čo je určite číslo deliteľné tromi. Keďže číslo $3x$ je deliteľné 3 aj 8 a zároveň

	1	2	3	4	5
strom	brest	jaseň	buk	lipa	topoľ
meno	Boris	Jakub	Anton	Silvester	Daniel
klub		golf		bowling	futbal
vták	sova	drozd	vrana	červienka	škorec
rok		1971		1973	1974

Tabuľka 5: zaznamenanie bodu 2

	1	2	3	4	5
strom	brest	jaseň	buk	lipa	topoľ
meno	Boris	Jakub	Anton	Silvester	Daniel
klub	squash	golf		bowling	futbal
vták	sova	drozd	vrana	červienka	škorec
rok	1970	1971	1972	1973	1974

Tabuľka 6: zaznamenanie bodov 9, 11 a 10

	1	2	3	4	5
strom	brest	jaseň	buk	lipa	topoľ
meno	Boris	Jakub	Anton	Silvester	Daniel
klub	squash	golf	tenis	bowling	futbal
vták	sova	drozd	vrana	červienka	škorec
rok	1970	1971	1972	1973	1974

Tabuľka 7: Odpoveď

Na konci	x	x	x
Po druhom premiestnení			
Po prvom premiestnení			
Na začiatku			

Tabuľka 8: začiatočná tabuľka

Na konci	x	x	x
Po druhom premiestnení	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$2x$
Po prvom premiestnení			
Na začiatku			

Tabuľka 9: prvý medzivýpočet

Na konci	x	x	x
Po druhom premiestnení	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$2x$
Po prvom premiestnení	$\frac{x}{4}$	$\frac{7x}{4}$	x
Na začiatku			

Tabuľka 10: druhý medzivýpočet

Na konci	x	x	x
Po druhom premiestnení	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$2x$
Po prvom premiestnení	$\frac{x}{4}$	$\frac{7x}{4}$	x
Na začiatku	$\frac{13x}{8}$	$\frac{7x}{8}$	$\frac{x}{2}$

Tabuľka 11: celá tabuľka

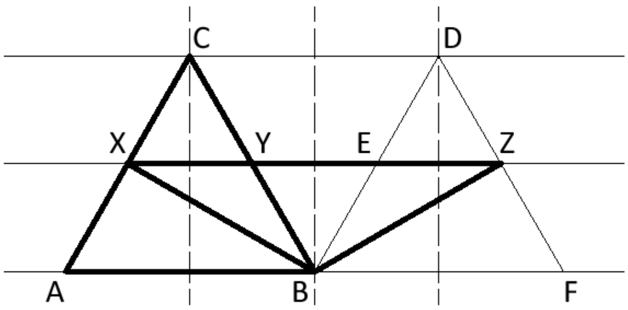
3 a 8 sú nesúdeliteľné (ich najväčší spoločný deliteľ je 1), musí byť číslo $3x$ deliteľné 24. Jediné číslo medzi 150 a 190, ktoré je deliteľné 24 je 168, preto $3x = 168$, $x = 56$. Po dosadení $x = 56$ do počtov mincí, ktoré nám vyšli, dostaneme $\frac{13x}{8} = \frac{13 \cdot 56}{8} = 91$, $\frac{7x}{8} = \frac{7 \cdot 56}{8} = 49$, $\frac{x}{2} = \frac{56}{2} = 28$.
Odpoveď: Počty mincí na jednotlivých kôpkach sú 91, 49 a 28.
Komentár: Väčšina z vás mala tento príklad správne, občas bolo niečo nevysvetlené. To však bolo veľmi ojedinelé, body ste strácali individuálne podľa rozsahu chýb.

Príklad č. 7 (opravovali Uľa, Jančo):

Postupne si budeme vytvárať obrázok, ktorý vidíme na obrázku 14. Najprv si vytvorím trojuholník BDC, ktorý bude zhodný s trojuholníkom ABC, budú spolu vytvárať kosoštvorec $ABCD$. Na strane BC trojuholníka BDC už máme stred Y. Ešte vytvoríme bod E v strede strany BD. Trojuholníky ABC a BDC sú rovnostranné a zhodné. Ich stredné priečky XY a YE budú rovnakej dĺžky a budú tiež ležať na jednej priamke.

Teraz si vytvoríme trojuholník BFD, ktorý bude zhodný s trojuholníkom BDC (aj ABC), budú spolu vytvárať kosoštvorec $BFDC$. Na strane BD trojuholníka BFD už máme stred E. Bod B je od stredu strany FD vzdialený rovnako ako od stredu strany AC(bod X), pretože je protiľahlý vrcholom týchto strán v zhodných rovnostranných trojuholníkoch BFD a ABC. No a keďže leží stred strany FD na priamke XY, tak vieme, že je to bod Z. Nakoľko trojuholníky BDC a BFD sú rovnostranné a zhodné, ich stredné priečky YE a EZ budú rovnakej dĺžky a budú tiež ležať na jednej priamke.

Takto sme si vytvorili akýsi symetrický obrázok. Vieme, že body X a Z sú od bodu B rovnako vzdialené. Povedzme, že veľkosť XY je 1. Potom aj veľkosti YE a EZ budú 1, takže veľkosť YZ bude $1 + 1 = 2$. Ak je veľkosť XY 1, veľkosť YZ je 2 a XY a YZ sú v pomere $1 : 2$.



Obrázok 14: 7.príklad

Odpoveď: XY a YZ sú v pomere $1 : 2$.
Komentár: Veľa z vás to malo dobre, pár nepochopilo zadanie a našli sa aj takí, ktorí mali naozaj veľmi sofistikované riešenia.

Príklad č. 8 (opravovali Betka, Lucka):

A (okrem Gamče): Označme si naše hľadané číslo $\overline{abcd}$ (čiara nad písmenami označuje, že je to štvorciferné číslo s ciframi a, b, c a d a nie nejaká premenná, alebo neznáma nazvaná $abcd$). Poďme zistiť, čo nám o ňom ďalej povie zadanie. To nám našepkáva, že prvá aj druhá dvojica cifier nášho hľadaného čísla je deliteľná jedenástimi. Keď sa pozrieme na dvojciferné násobky jedenástich zistíme, že každý z nich má obe cifry rovnaké. Čiže si naše hľadané číslo vieme napísať jednoduchšie – napríklad ako $\overline{aabb}$.

Teraz urobíme jeden veľký trik, ktorý si najprv popíšeme všeobecne. Chceme zistiť, či sú nejaké dve čísla, X a Y, deliteľné nejakým konkrétnym číslom (napríklad sedmičkou). Teda chceme zistiť, či platí, že $X = 7 \cdot K$ a $Y = 7 \cdot L$, kde K a L sú prirodzené čísla. Muselo by platiť aj to, že $X - Y = 7 \cdot (K - L)$ je deliteľné siedmimi. Nanešťastie to, že je rozdiel dvoch čísel deliteľnými siedmimi priamo neznamená to, že sú aj dve pôvodné čísla deliteľné sedmičkou (skúste si dve čísla, ktoré dávajú po delení siedmimi rovnaký zvyšok). No už nám stačí len vyskúšať, či je jedno z pôvodných čísel deliteľné siedmimi a keď zistíme, že je, vieme, že aj druhé číslo ňou deliteľné je (samozrejme, pokiaľ bol siedmimi deliteľný rozdiel). Možno sa vám zatiaľ zdá, že nám to vôbec nepomôže, no uvidíte, že to je inak :)

Zistíme, kedy dávajú čísla $\overline{aabb}$ a $\overline{bbaa}$ rovnaký zvyšok po delení siedmimi (v niektorom z prípadov sú aj obe siedmimi deliteľné). Má platiť:

$$\begin{aligned}
\overline{aabb} - \overline{bbaa} &= 7 \cdot A \\
1000a + 100a + 10b + b - 1000b - 100b - 10a - a &= 7 \cdot A \\
1089a - 1089b &= 7 \cdot A \\
1089 \cdot (a - b) &= 7 \cdot A
\end{aligned}$$

Na oboch stranách rovnice máme súčin. Ak súčin na pravej strane rovnice má byť deliteľný siedmimi (číslo A je prirodzené), musí nimi byť deliteľný aj súčin na ľavej strane. Keď číslo 7 je prvočíslom a nedelí číslo 1089, musí byť siedmimi deliteľný výraz $(a - b)$. Ak sú a aj b nenulové cifry (ak by ľubovoľná z nich bola nulová, jedno z čísel by nebolo štvorciferné), máme 11 možností, aké môžu mať hodnoty – 1 a 8; 2 a 9; 1 a 1; 2 a 2; 3 a 3; 4 a 4; 5 a 5; 6 a 6; 7 a 7; 8 a 8; 9 a 9 (je úplne jedno, ktoré z nich je a a ktoré b). Po dosadení do všobecného tvaru nášho čísla zistíme, že čísla 1188 a 8811 a 2299 a 9922 síce dávajú (po dvojiciach) rovnaké zvyšky po delení siedmimi, no ani jedno z nich priamo deliteľné nie je. Rovnako je to aj s číslami 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 8888, 9999, ktoré síce samozrejme majú rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako keď ich napíšeme odzadu (keďže sa tým nezmenia), ale nie sú siedmimi deliteľné. Túto vlastnosť spĺňa jedine číslo 7777.
Odpoveď: Na tabuli bolo napísané číslo 7777.

B (pre Gamču): Najprv si ukážeme druhý trik, ktorý sa dá použiť v mnohých príkladoch, ktoré sa zaoberajú deliteľnosťami (všetkým zároveň odporúčam, nech si pozrú aj prvý trik, popísaný v 8A). Máme 2 čísla X a Y, o ktorých chceme zistiť, či sú deliteľné nejakým číslom, napríklad siedmimi. To by znamenalo, že sa dajú zapísať v tvare $X = 7 \cdot K$ a $Y = 7 \cdot L$, kde K a L sú prirodzené čísla. To ale znamená, že aj ich súčet $X + Y = 7 \cdot K + 7 \cdot L = 7 \cdot (K + L)$ je deliteľný siedmimi. Na to, aby sme s istotou mohli povedať, že aj pôvodné dve čísla boli deliteľné siedmimi, treba podobne ako v prvom triku skontrolovať, či nimi bolo aspoň jedno z nich deliteľné (skúste si tento trik pre dve čísla, jedno so zvyškom 3 a druhé so zvyškom 4 po delení siedmimi a uvidíte prečo). Znova to nevyzerá, že by nám to veľmi pomohlo, no zdanie môže klamať.

Označme si pôvodné číslo na tabuli ako $\overline{abcd}$ a poďme zisťovať, kedy je jeho súčet s číslom $\overline{dcba}$ deliteľný siedmimi:

$$\begin{aligned}
\overline{abcd} + \overline{dcba} &= 7 \cdot A \\
1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a &= 7 \cdot A \\
1001 \cdot (a + d) + 110(b + c) &= 7 \cdot A \\
7 \cdot 143 \cdot (a + d) + 110(b + c) &= 7 \cdot A
\end{aligned}$$

Pravá strana rovnice má byť deliteľná siedmimi (číslo A je prirodzené), takže aj ľavá strana nimi musí byť deliteľná. Jeden zo sčítancov na ľavej strane je vždy deliteľný siedmimi. Na to, aby bol celý súčet deliteľný, musí byť deliteľný aj druhý sčítanec. Lenže číslo 110 siedmimi deliteľné nie je, to znamená, že nimi musí byť deliteľný výraz $(b + c)$.

Teraz si všimnime ďalšiu vlastnosť čísla na tabuli – jeho prvé dvojčíslie je deliteľné devätnástimi. To ale znamená, že prvé dvojčíslie môže byť len 19, 38, 57, 76 alebo 95. Máme 5 možností, akú hodnotu môže nadobúdať cifra b a ku každej z nich si vieme jednoducho zistiť, akú hodnotu musí nadobúdať cifra c, použitím vlastnosti z minulého odseku (a to, že c môže nadobúdať hodnoty len od 1 po 9 – je to cifra):

b	9	8	7	6	5
c	5	6	0, 7	1, 8	2, 9

Máme prvé 3 cifry možných čísel, čo boli na tabuli. Ku každému z nich stačí dopočítať poslednú tak, aby bolo deliteľné siedmimi a skontrolovať, či zostane deliteľné siedmimi, aj keď ho napíšeme odzadu (pre istotu). Čísla, ktoré boli napísané na tabuli sú: 1953, 3864, 5705, 5775, 7616, 7686, 9520, 9527, 9590 a 9597. Z týchto ešte musíme vylúčiť čísla 9520 a 9590, pretože po obrátení poradia cifier nie sú štvorciferné. Overením zistíme, že aj všetky „obrátené“ čísla sú deliteľné siedmimi.
Odpoveď: Čísla, ktoré mohli byť napísané na tabuli sú 1953, 3864, 5705, 5775, 7616, 7686, 9527 a 9597.
Komentár: Väčšina z vás riešila tento príklad postupným vypisovaním možností. Tento spôsob nie je principiálne zlý, ale je zdĺhavý a ľahko sa pri ňom môžete pomýliť. Preto je vždy lepšie snažiť sa nájsť nejakú „hlbšiu pointu“ príkladu, ako len bezhlavo vypisovať a skúšať desiatky možností. Body sme strhávali najmä za nevypísanie všetkých možností. To, že do riešenia napíšete, že ste ich vyskúšali, nám nijako nemôže dokázať, že ste ich naozaj vyskúšali!

Príklad č. 9 (opravovala Niwka):

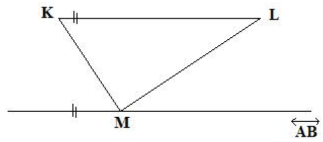
Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný, tak musia päty výšok na jeho ramená ležať rovnako vzdialené od vrcholov základne, v tomto prípade úsečky AB. Takisto platí, že uhly pri vrcholoch základne rovnoramenného trojuholníka sú rovnako veľké. Z toho vyplýva, že priamka spájajúca päty výšok na ramená rovnoramenného trojuholníka je rovnobežná s priamkou, na ktorej leží základňa tohto trojuholníka – úsečka AB.

Zo zadania vieme, že body K a L sú práve pätami výšok na ramená trojuholníka ABC. To znamená, že priamka, na ktorej bude ležať úsečka AB, bude rovnobežná s priamkou KL. Takisto vieme, že bod M leží na priamke AB, takže priamku AB zostrojíme ako priamku rovnobežnú s priamkou KL, ktorá zároveň prechádza bodom M. Priebežný náčrtok je na obrázku 15.

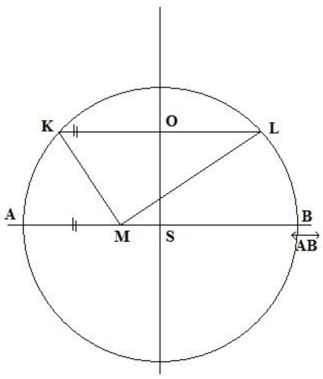
Keďže body K a L sú pätami kolmíc trojuholníka ABC, tak s protiľahlou stranou zvierajú pravý uhol. Teda trojuholníky AKB a ALB sú pravouhlé trojuholníky s preponou AB. Body K a L budú preto ležať na Tálesovej kružnici nad úsečkou AB. Jej stred sa nachádza v strede úsečky AB, označme si ho ako bod S. Aby sme mohli zostrojiť Tálesovu kružnicu, musíme najprv nájsť bod S. Keďže úsečky AB a KL sú rovnobežné a trojuholník ABC je rovnoramenný, musia stredy týchto úsečiek ležať na jednej priamke, ktorá je na obe tieto úsečky kolmá. Zostrojíme si stred úsečky KL, označme si ho ako bod O. Stred úsečky AB, bod S, je potom priesečníkom priamky AB a kolmice na priamky AB a KL, ktorý prechádza bodom O.

Teraz si zostrojíme spomínanú Tálesovu kružnicu. Jej stred sa nachádza v bode S a jej polomer je rovný dĺžke úsečiek SK a SL. Body A a B sú priesečníkmi priamky AB a zostrojenej Tálesovej kružnice. Ďalší priebežný náčrt zobrazuje obrazok 16.

Zostáva nám už len zostrojiť bod C. Trojuholník ABC môže byť pravouhlý, ostrouhlý alebo tupouhlý. V prípade pravouhlého trojuholníka by päty výšok na ramená trojuholníka ABC ležali vo vrchole pri pravom uhle a teda body K a L by boli totožné, takže trojuholník KLM by neexistoval, preto trojuholník ABC nemôže byť pravouhlý. Ostali nám teda nasledujúce dve možnosti.



Obrázok 15: prvý náčrt



Obrázok 16: druhý náčrt

Body K a L ako päty výšok na ramená trojuholníka ABC ležia na ramenách trojuholníka ABC, na úsečkách AC a BC. To znamená, že priamky AK a AC sú totožné, rovnako sú totožné aj priamky BL a BC a priesečníkom týchto priamok je práve bod C. Takže bod C dostaneme ako priesečník priamok BL a AK.

Body K a L ako päty výšok na ramená trojuholníka ABC ležia na priamkách, ktorým patria ramená trojuholníka ABC, teda na priamkach AC a BC, ale mimo úsečiek AC a BC. To znamená, že priamky AL a AC sú totožné, rovnako sú totožné aj priamky BK a BC a priesečníkom týchto priamok je práve bod C. Takže bod C dostaneme ako priesečník priamok AL a BK.

Odpoveď: Z uvedeného riešenia vyplýva, že existujú práve tieto dva nami zostrojené trojuholníky ABC. Riešenia sú na obrázkoch 17 a 18.

Komentár: Mnohí z vás našli iba jedno riešenie tohto príkladu a k tomu uviedli, že existuje iba jeden trojuholník ABC, za čo šlo zopár bodov dolu. Takisto sa strhávali body za nejaké malé nejasnosti v postupe, napríklad keď ste nevysvetlili prečo sú priamky AB a KL rovnobežné a podobne.

Prémia (opravovali Ľubka, Monička, Tinka):

Zadanie: Janko má 3 modré, 3 žlté a 3 červené štvorčeky. Vytvoril z nich veľký štvorec, ktorý mal rozmery 3×3. Vymyslel si pravidlo, podľa ktorého sa nemôžu 2 štvorčeky rovnakej farby dotýkať stranou. Nájdite všetky riešenia.

Riešenie: Najprv si nakreslíme štvorec s rozmermi 3×3 a očíslujeme políčka (obrázok 19.)

Chceme zistiť rozloženie farieb v štvorci, preto štvorec otočený o 90, 180, 270 stupňov budeme zatiaľ

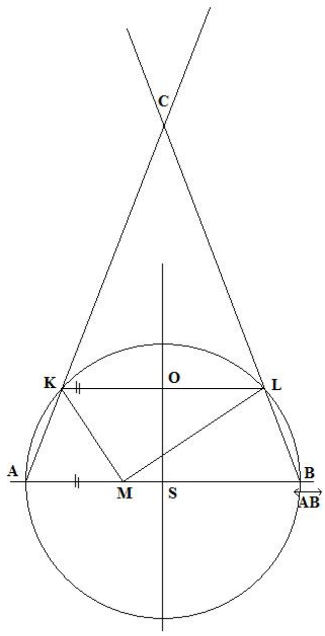
Týmito dvomi kritériami sa budeme zaoberať až neskôr.

Najskôr zistíme, ako vieme uložiť 3 štvorčeky jednej farby, aby sa navzájom políčka nedotýkali. Túto prvú farbu si nazveme A-farba. Pre lepšiu predstavivosť si skúste kresliť jednotlivé štvorce. Môžu nastať nasledovné prípady jej uloženia vzhľadom na štvorec.

- Jeden zo štvorčekov bude v strede (políčko 5). Zvyšné dva nesmú byť na stranách. Musia sa teda nachádzať v rohoch, buď susedných (napr. 1 a 3) alebo oproti sebe (napr. 1 a 9).

V ďalších možnostiach už žiadny štvorček s A-farbou nebude v strede. Postupne vyskúšame ďalšie možnosti podľa počtu štvorčekov s A-farobu v rohoch.

- V rohoch budú všetky tri štvorčeky (napr. 1, 3 a 9).



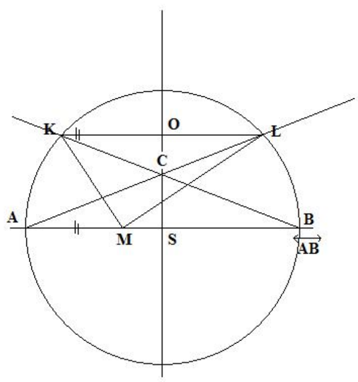
Obrázok 17: Ostrouhlý trojuholník ABC

- V rohoch budú dva štvorčeky. Aby tretí nebol v strede, musia tieto dva byť vedľa seba (napr. 1 a 3) a tretí na protiľahlej strane (políčko 8).
- V rohoch bude jeden štvorček (napr. 1). Zvyšné dva nesmú byť ani v rohoch, ani v strede a ani na políčkach 2, 4. Zostávajú nám jediné dve miesta, čiže ucelená trojica vyzerá takto 1, 6 a 8.
- V rohoch nebude žiaden štvorček. Všetky tri sa teda nachádzajú na stranách štvorca (napr. 2, 4 a 6).

Samozrejme každú z týchto možností môžme pootáčať do zvyšných troch smerov. Samozrejme každú z týchto možností môžeme pootáčať do zvyšných troch smerov.

Do všetkých obrázkov ideme doplniť zvyšné dve farby. Druhú farbu si nazveme B-farba a tretiu C-farba.

- A-farba je na 1, 5, 9. Farbu B (je jedno, ktorá zo zvyšných dvoch to bude) si uložíme napríklad na 2. Susedné pole 3 musí byť farbou C. S ním zospodu susedí pole 6, ktoré musíme označiť B. Na druhej polovici to bude vyzerať podobne, rožné políčko jednej farby, susedné dve druhej farby. Vzhľadom na počet použitých farieb je jasné, že B-farba bude na poli 7 a C-farba na poliach 4 a 8. Toto rozloženie považujeme za prvú možnosť.
- A-farba je na 1, 3, 5. Postupujeme veľmi podobne ako v predošlej možnosti. B dáme napríklad na 8. Susedné políčka 7 a 9 musia mať C-farbu. Nad nimi sú prázdne políčka, ktoré nesmú byť zafarbené na C, takže nám pre ne ostáva len farba B. Posledné voľné políčko 2 bude určite C-farby. Toto rozloženie považujeme za druhú možnosť.
- A-farba je na 1, 3, 9. Farbu B dáme do stredu. Zvyšné dva štvorčeky nesmú byť na poliach 2, 4,



Obrázok 18: Tupouhlý trojuholník ABC

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obrázok 19: očíslovanie políčok

Táto možnosť nemá riešenie.

- A-farba je na 1, 3, 8. Stredné políčko nafaríme na B-farbu. Ako sme spomenuli v predchádzajúcom bode,
- A-farba je na 1, 3, 8. Stredné políčko nafarbíme na B-farbu. Ako sme spomenuli v predchádzajúcom bode, zvyšné dva štvorce musia byť v rohoch. Jediné voľné rohy sú 7 a 9. Zvyšné tri políčka: 2, 4 a 6 budú C. Porovnajme túto možnosť s druhým riešením. Po krátkom pohľade vidíme, že po otočení o 180 stupňov a výmene farieb vznikne ten istý obrázok.
- A-farba je na 1, 6, 8. Do stredu dáme B. Susediace prázdne polia 2 a 4 budú určite C-farby. S nimi susediace rohy 3 a 7 musia byť znova B. Na posledné políčko 9 nám ostalo už len C. Túto možnosť porovnáme s prvým riešením. Opäť je to to isté, len sa vymenili farby a štvorec je otočený o 90 stupňov.
- A-farba je na 2, 4, 6. Pole 8 zafarbíme na B. Okolo 8 sú 3 prázdne polia, ktoré musíme zafarbiť na C-farbu. Pre zvyšné políčka 1 a 3 nám ostala B-farba. Táto možnosť je znova tá istá ako druhé riešenie.

Zistili sme, že existujú len dve usporiadania(20,21)

A	B	C
C	A	B
B	C	A

Obrázok 20: 1.riešenie

A	B	A
C	A	C
B	C	B

Obrázok 21: 2.riešenie

Ostáva nám len vypočítať, koľko možností vznikne výmenou farieb a otáčaním. najprv si zistíme počet kombinácii farieb modrej, žltej a červenej, ktoré doplníme namiesto A-farba,

B-farba a C-farba. Farbou A môže byť hocktorá z nich, teda máme tri možnosti. Farbou B môžu byť potom už len zvyšné 2 farby, lebo jednu sme uz použili, teda ku každej z tých troch možností máme dve. To znamená, že máme $3 * 2 = 6$ možností zámeny farieb. No a zvyšná farba bude C-farbou, teda sa nám počet možností nijak nezmení.

Naše 2 riešenia teraz môžeme vynásobiť šiestimi:$2 * 6 = 12$, čím nám vzniklo 12 rôznych štvorcov. Vezmeme si najprv tých šesť, ktoré vznikli zámenou farieb z prvého riešenia. Vidíme, že jedna uhlopriečka je vytvorená jednou farbou. Po otočení o 90 stupňov dostaneme rôzne štvorce, vytvorí sa druhá uhlopriečka. ALE keď to otočíme o ďalších 90 stupňov, uhlopriečka sa vráti na pôvodne miesto, zmenila sa poloha B a C-farieb. ALE keď to otočíme o ďalších 90 stupňov, uhlopriečka sa vráti na pôvodné miesto, zmenila sa poloha B a C-farieb. Nakoľko máme zahrnutú už aj výmenu farieb, tieto štvorce budú rovnaké ako pôvodné. Otáčaním prvého riešenia vieme vytvoriť len 12 navzájom rôznych štvorcov.

Teraz si zoberieme tých šesť, ktoré vznikli zámenou farieb z druhého riešenia. Po otočení o 90, 180, 270 stupňov dostávame vždy navzájom rôzne štvorce, lebo poloha troch štvorčekov ľubovoľnej farby sa po ľubovoľnom otočení nikdy neopakuje. Otáčaním druhého riešenia vieme vytvoriť 24 navzájom rôznych štvorcov.

Spočítame štvorce z prvého a druhého riešenia: $12 + 24 = 36$.

Odpoveď: Janko mohol nájsť 36 rôznych štvorcov.

Komentár: Tento príklad bol celkom ťažký. Tí z vás, ktorí nemali správne zadanie, nemohli získať viac ako 2 bodíky, aj to len v prípade, že vaša úloha mala riešenie a vy ste ho našli. Tí, ktorí poslali len zadanie dostali 1 bodík. Zvyšným sme udelovali body za nájdenie tých dvoch usporiadaní, za výmenu farieb a za správne otáčanie štvorca. Zvyšným sme udeľovali body za nájdenie tých dvoch usporiadaní, za výmenu farieb a za správne otáčanie štvorca. Ak ste považovali otočený štvorec za ten istý, bolo to treba spomenúť. Celkovo ste to zvládli veľmi dobre. Nezabúdajte však písať aj k takýmto príkladom postupy riešenia! V prípade, že nenájdete všetky riešenia, môžte dostať veľa bodov aj za postup. Držím palce aby ste sa dostali na sústredkooo;)