Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2008/2009

Príklad č. 1 (opravovala Niwka):

Keďže sa farmárovi každý rok strany poľa zväčšili dvojnásobne a obvod poľa môžeme vypočítať ako súčet jeho strán, tak sa musel aj jeho obvod každý rok zväčšiť dvojnásobne. Na začiatku prvého roka malo jeho obdĺžnikové pole strany $a = 10\,\mathrm{m}$ a $b = 20\,\mathrm{m}$. Jeho obvod bol teda na začiatku prvého roka $2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (10\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{m}) = 60\,\mathrm{m}$. Ako sme už spomínali, po každom roku sa mu obvod zdvojnásobil a teda obvod jeho poľa bude počas ďalších rokov nasledujúci:

- po 1. roku $60\,\mathrm{m} \cdot 2 = 120\,\mathrm{m}$
- po 2. roku $120\,\mathrm{m} \cdot 2 = 240\,\mathrm{m}$
- po 3. roku $240\,\mathrm{m} \cdot 2 = 480\,\mathrm{m}$
- po 4. roku $480\,\mathrm{m} \cdot 2 = 960\,\mathrm{m}$
- po 5. roku $960\,\mathrm{m} \cdot 2 = 1920\,\mathrm{m}$

Po piatom roku, teda medzi požadovaným piatym a šiestym rokom sa obvod, jeho poľa zväčšil z $960\,\mathrm{m}$ na $1920\,\mathrm{m}$. Obvod poľa sa teda zväčšil o $1920\,\mathrm{m} - 960\,\mathrm{m} = 960\,\mathrm{m}$.

Odpoveď: Farmár musel medzi piatym a šiestym rokom dokúpiť 960 m pletiva.

Komentár: Bol to pomerne jednoduchý príklad, ktorý vám nerobil takmer žiadne problémy. Väčšina z vás ho mala správne, body boli zväčša strhávané za nejaké nejasnosti, či malé chybičky v postupe.

Príklad č. 2 (opravovali Tinka, Ľubka, Monička):

Zo zadania si vypíšme najdôležitejšie údaje:

1. Pavol je mladší ako Jakub, ale má viac ako 4 roky.
2. Jakub je mladší ako Matej o 3 roky.
3. Vnuci majú spolu trikrát menej rokov, ako ich dedko.
4. Spolu s dedkom majú 100 rokov.

Chceme zistiť, koľko rokov majú Pavol, Jakub, Matej a ich dedko. Najprv vyrátame dedkov vek. Budeme využívať tretí a štvrtý bod zadania. Predstavme si, že vek vnukov tvorí 1 dielik. Keďže dedko je trikrát starší ako vnuci, bude tvoriť 3 dieliky. Spolu teda máme 4 dieliky, ktoré predstavujú súčet veku vnukov a dedka. Zo zadania vieme, že to je 100 rokov. Aby sme zistili, koľko rokov tvorí 1 dielik, musíme 100 rokov vydeliť štyrmi: $100 : 4 = 25$. Z tohto dostávame, že vnuci majú spolu 25 rokov (1 dielik). K veku dedka sa teraz dopracujeme veľmi jednoducho. Stačí, keď celkový vek vnukov vynásobíme tromi: $25 \cdot 3 = 75$. Dedko má 75 rokov.

Teraz sa pozrime na vek jednotlivých chlapcov. V predchádzajúcej časti sme zistili, že spolu majú 25 rokov. Z druhého bodu zadania vieme, že rozdiel medzi Jakubovým a Matejovým vekom sú 3 roky. Máme dve možnosti ako môže byť rozdiel medzi vekmi chlapcov nepárne číslo:

1. Jakubov vek je párne číslo. Prirátaním troch rokov dostanem Matejov vek – nepárne číslo.
2. Jakubov vek je nepárne číslo. Prirátaním troch rokov dostanem Matejov vek – párne číslo.

V oboch prípadoch dostaneme jedno párne a jedno nepárne číslo. Súčet čísel s rozdielnou paritou[1] je vždy nepárne číslo.

Teraz postupne zistíme, či Pavlov vek je párny alebo nepárny. 25 rokov je súčet veku Pavla, Jakuba a Mateja. Vzhľadom na to, že súčet rokov Jakuba a Mateja je nepárne číslo a prirátaním Pavlovho veku má vzniknúť tiež nepárne číslo, musí byť Pavlov vek určite párne číslo.

Ak spojíme tento poznatok s prvým bodom zadania, ktorý hovorí, že Pavol má viac ako 4 roky, vyjde nám, že Pavol má 6, 8, 10,... rokov. Postupne začneme skúšať tieto možnosti.

Ak by mal Pavol 6 rokov, tak zvyšní vnuci majú spolu: $25 - 6 = 19$ rokov. Predstavme si znova, že Jakub je 1 dielik. Matej bude tvoriť 1 dielik + 3 roky. Od 19 rokov odrátame tie 3 roky a dostaneme súčet dvoch dielikov: $19 - 3 = 16$. Vydelíme 16 dvomi a dostaneme 1 dielik = počet Jakubových rokov: $16 : 2 = 8$ rokov. Toto je Jakubov počet rokov a ak k nemu prirátame 3 roky, dostaneme Matejov vek: $8 + 3 = 11$ rokov. Všetko vychádza, takže máme riešenie. Musíme však overiť, či úloha nemá viac riešení!

Ak by mal Pavol 8 rokov, tak zvyšní vnuci majú spolu: $25 - 8 = 17$ rokov. Postupujeme rovnako ako v prvom prípade, teda si predstavíme, že Jakub je 1 dielik a Matej 1 dielik a ešte 3 roky, keď ich odčítame: $17 - 3 = 14$. Vydelíme 14 dvomi a dostaneme počet Jakubových rokov (ten 1 dielik): $14 : 2 = 7$ rokov. Tu nastáva problém. Jakub má 7 rokov a Pavol má 8 rokov. A teda nám nesedí 1. bod zadania, že Jakub je starší ako Pavol.

S pribúdajúcim vekom Pavla klesá vek Jakuba a teda nemusíme skúšať ďalej, viac riešení určite nenájdeme. Takže úloha má len jedno riešenie.

Odpoveď: Dedko má 75 rokov, Pavol 6 rokov, Jakub 8 rokov a Matej 11 rokov.

Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký, všetci ste ho vyrátali správne, čo nás veľmi teší. 2 body sme strhávali, ak ste nevysvetlili, prečo má tento príklad len jedno riešenie. Ďalej ste mohli stratiť bodík, ak ste nevysvetlili, ako ste zistili dedkov vek. Iné chyby boli veľmi zriedkavé. Celkovo ste všetci príklad zvládli nadpriemerne dobre. Pozdravujem Andyho, za krásne riešenie s venovaním.

Príklad č. 3 (opravovali Betka, gubika):

A (okrem Gamče): Podľa zadania Klára točila kolesom proti smeru hodinových ručičiek, teda čísla sa zväčšovali (až kým sme nedošli k stovke a neskočili späť na jednotku). Posledné číslo, ktoré vytočila bolo najväčšie, ak netočila cez čísla 100 a 1. Táto varianta, prechodu cez stovku, by nám ale nevyhovovala, ako si ukážeme na konci.

[1] vlastnosť čísla, či je párne, alebo nepárne

Označme si číslo, ktoré Klára vytočila na prvýkrát x. Číslo, ktoré koleso ukazovalo po druhom zatočení bolo o 20 väčšie, teda $x + 20$, po treťom o 10 väčšie, teda $x + 30$ a po štvrtom o 7 väčšie, teda $x + 37$. Toto platí, ak Klára nepretočila koleso cez stovku ku jednotke.

Najväčší možný súčet vytočených čísel dostaneme, keď jednotlivé sčítance budú čo najväčšie. Za náš najvyšší sčítanec si teda môžme dosadiť najvyššie číslo, aké na kolese máme, teda 100. Vyrátame si x: $x + 37 = 100$, teda $x = 63$. Keď už poznáme x, ľahko dorátame ostatné čísla, ktoré Klára vytočila. Pri prvom zatočení je to 63, pri druhom $x + 20 = 63 + 20 = 83$, pri treťom $x + 30 = 63 + 30 = 93$ a pri štvrtom zatočení je to 100. Súčet týchto čísel je $63 + 83 + 93 + 100 = 339$.

Sú to najvyššie čísla, aké mohla Klára vytočiť. V prípade, že by sme zvýšili x, tak všetky štyri vytočené čísla sa zvýšia o jedna a súčet sa tiež zvýši – konkrétne o 4. Ale číslo, ktoré by nám vyšlo pri štvrtom točení by sa posunulo „za“ stovku, a to by znamenalo zníženie súčtu o sto! (Budeme mať teda súčet 243) A toto nám súčet veľmi pokazí, a ďalšie „posúvanie“ čísel po obvode kolesa nám ho tak skoro nevylepší naspäť a preto sa žiadny väčší súčet nedá dosiahnuť.
Odpoveď: Najvyšší súčet, aký mohla Klára vytočiť, je 339.

B (pre Gamču): V tomto príklade máme dva spôsoby, ako mohla Klára točiť kolesom:

1. V druhom točení točila v protismere, teda čísla rástli. Tretie a štvrté točenie išlo v smere a čísla klesali.
2. V druhom točení točila v smere, teda čísla klesali. Tretie a štvrté točenie išlo v protismere a čísla stúpali.

Postupne sa pozrieme na oba prípady. Ak chceme, aby bol súčet čo najväčší, tak nechceme prechádzať cez stovku ku jednotke. Povieme si neskôr prečo.

Začneme prvým prípadom, teda keď Klára točí najprv proti a potom v smere hodinových ručičiek. Číslo, ktoré vytočila prvým točením si označíme x. Druhým točením sa k číslu x pričíta 20 polí, čiže $x + 20$. Tretím točením, ktoré už prebieha v smere hodinových ručičiek, sa posunieme o 10 polí späť. Keďže druhým točením sa pričítalo 20 polí a tretím točením sa odčítalo 10 polí, tak po treťom točení sa nachádzame na políčku $x + 10$. Štvrtým točením odčítame 7 polí a dostávame sa na políčko $x + 3$. Za najväčšie číslo, aké Klára vytočila, si dosadíme najväčšie číslo, aké na kruhu je, teda $x + 20 = 100$. Z toho vyplýva, že $x = 80$ a pomocou toho vieme dorátať všetky čísla, ktoré Klára vytočila. Pri prvom točení to bolo 80, pri druhom 100, pri treťom $x+10 = 80+10 = 90$ a pri štvrtom $x+3 = 80+3 = 83$. Súčet týchto čísel sa teda rovná $80+100+90+83 = 353$.

A prečo „prechod“ cez stovku súčet nezvýši? Ak by sme celú situáciu na kolese posunuli o jedno v smere hodinových ručičiek. Tak sa nám všetky štyri sčítance zvýšia o jedna a celkový súčet zas o štyri. Ale v prípade, že niektorý sčítanec sa preklopí cez stovku tak sa ešte navyše celkový súčet zníži o 100.

Pozrime sa na to, ako sa bude meniť súčet. Teraz máme 353. Ak posunieme o jedna, nastane spomínané preklopenie, takže dostaneme $353 + 4 - 100 = 249$. Potom sa nám bude súčet posúvaním zvyšovať o štyri a toto nastane presne 8 krát a na deviaty sa druhý najväčší sčítanec $x + 10$ prehupne cez stovku. Po tých ôsmych zvyšovaniach sa dostaneme len k súčtu $249 + 8 \cdot 4 = 281$ a po deviatom budeme mať súčet $281 + 4 - 100 = 177$. A aj keď budeme takto posúvať ďalej, väčší súčet ako ten pôvodný už nedostaneme .

Teda ak prvý krát točila v protismere, väčší súčet ako 353 nedostaneme.

Teraz sa pozrime na druhý prípad, keď Klára točí najprv v smere a potom proti smeru hodinových ručičiek. Číslo vytočené prvým točením si znova označíme x, druhým točením $x - 20$, tretím točením $x - 10$ a štvrtým $x - 3$. Za najväčšie číslo, teda za x, si dosadíme najvyššie číslo, teda 100. Pomocou neho môžeme dopočítať čísla, ktoré Klára vytočila. Prvým vytočeným číslom je 100, druhým $x - 20 = 100 - 20 = 80$, tretím $x - 10 = 100 - 10 = 90$ a štvrtým $x - 3 = 100 - 3 = 97$. Súčet týchto čísel je $100 + 80 + 90 + 97 = 367$, čo je viac ako v prvom prípade. (A rovnakým spôsobom ako v prvom prípade musíme overiť, že prechod cez stovku nám tento súčet nevylepší.)
Odpoveď: Klára mohla vytočiť najväčší súčet 367.
Komentár: Príklad bol pomerne ľahký, skoro všetci mali správny výsledok. Body sme strhávali najviac ak ste v B nevylúčili druhú možnosť.

Príklad č. 4 (opravovali Kozzy, Spišo):

Zo zadania vieme, že existujú 2 typy ľudí, poctivci a podvodníci. Poctivec vždy hovorí pravdu a podvodník vždy klame. Vo dverách sa zjavili dvaja ľudia, my však nevieme či sú obaja poctivci, alebo obaja podvodníci, alebo jeden je poctivec a druhý podvodník. Sú štyri možnosti odpovedí aké mohol Peter dostať.

1. Ak je odpovedajúci klamar a aj jeho spolubývajúci je klamar, vtedy dostane Peter odpoveď „ano“
2. Ak je odpovedajúci klamár a jeho spolubývajúci je poctivec, vtedy dostane Peter odpoveď „nie“
3. Ak je odpovedajúci poctivec a jeho spolubývajúci je klamar, vtedy dostane Peter odpoveď „ano“
4. Ak je odpovedajúci poctivec a aj jeho spolubývajúci je poctivec, vtedy dostane Peter odpoveď „ano“

Vieme, že Petrovi bolo hneď po odpovedi jasné, akí to boli ľudia a to je možné, len ak odpoveď bola jednoznačná, teda „nie“. Keďže odpoveď „nie“ mohol dostať jedine od podvodníka, vieme, že pri dverách stál podvodník. Jeho odpoveď je klamstvo, teda je pravda, že jeho spolubývajúci je poctivec.
Odpoveď: Človek, ktorého sa pýtal Peter bol podvodník, jeho spolubývajúci poctivec.
Komentár: Viacerým z vás sa stalo, že nesprávne pochopili zadanie a mysleli si, že v dome býva práve jeden podvodník a jeden poctivec. V tomto prípade ste nedostali viac ako 1, alebo 2 body. Inak to mala väčšina z vás správne. Stratili ste najviac 1 bod ak ste niečo nevysvetlili poriadne.

Príklad č. 5 (opravovali Uľa, Lucka):

Súčet všetkých čísel od 1 do 6 je 21. Číslo, ktoré neskôr doplníme do spodného riadku tabuľky označme x. Súčet v tomto riadku sa bude rovnať x. Tento súčet má byť 2-krát menší ako súčet v riadku nad ním. Teda súčet v druhom riadku sa bude rovnať $2 \cdot x$. V druhom riadku musí byť taktiež 2-krát menší súčet ako v riadku nad ním. Čiže v prvom riadku sa bude súčet čísel rovnať $4 \cdot x$. Súčty v riadkoch sa musia rovnať súčtu všetkých čísel v tabuľke, takže

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot x + 4 \cdot x &= 21 \\ 7 \cdot x &= 21 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

V spodnom riadku bude číslo 3. Teraz vieme dopočítať súčty čísel v prvom a druhom riadku. Súčet čísel v druhom riadku bude $2 \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$, v prvom riadku je súčet ešte 2-krát väčší, čiže $2 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot 3 = 12$. V druhom riadku sú 2 štvorčeky, takže číslo 6 sa dá „poskladať“ ako $6 + 0$, $5 + 1$, $4 + 2$ alebo $3 + 3$. Dvojicu $6 + 0$ nemôžme použiť, lebo číslo 0 nemáme medzi ponúkanými číslami. V druhom riadku môžu byť vpísané čísla $5 + 1$ a $4 + 2$. Dvojicu $3 + 3$ nemôžeme použiť, lebo číslo 3 sme už použili a máme k dispozícií len jedno číslo z každého čísla.

Pokračujeme podmienkou zo zadania, že súčty čísel v jednotlivých stĺpcoch sú tri po sebe idúce čísla. Máme tu tri stĺpce. Prvý s tromi štvorčekmi, druhý s dvomi štvorčekmi a tretí s tromi štvorčekmi. Označme si najmenší z týchto troch súčtov y. Potom ďalšie dva súčty budú $y + 1$ a $y + 2$. Celkový súčet súčtov v stĺpcoch sa musí rovnať celkovému súčtu čísel od 1 do 6, teda

$$\begin{aligned} y + (y + 1) + (y + 2) &= 21 \\ 3 \cdot y + 3 &= 21 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Vieme teda, že jeden zo súčtov je 6, ďalší 7 a ďalší 8. Ešte ale nevieme, v ktorých stĺpcoch sú to súčty. Súčet 7 a 8 nemôže byť v treťom stĺpci, pretože do tabuľky nemôžeme vpisovať čísla 7 a 8 (a máme tam doplniť len jedno políčko). V treťom stĺpci bude číslo 6 a teda aj súčet bude 6. Tabuľka zatiaľ vyzerá tak, ako ukazuje obrázok 1.

		6
3		

Obrázok 1: Zatiaľ sme prišli na toto

1	5	6
4	2	
3		

Obrázok 2: Prvé riešenie

4	2	6
1	5	
3		

Obrázok 3: Druhé riešenie

V druhom stĺpci nemôže byť súčet čísel 8, lebo zostávajúce čísla, ktoré možno doplniť sú 1, 2, 4, 5 a žiadna dvojica z nich nedáva súčet 8. Z toho nám vychádza, že v druhom stĺpci bude súčet čísel 7 a v prvom stĺpci bude súčet čísel 8.

V stĺpci, v ktorom má byť súčet čísel 8, už je jedno pevné číslo 3. Zostáva nám nájsť zvyšné dve. Teda súčet v ostatných 2 štvorčekoch musí byť 5. Môžu to byť *jedine* čísla 4 a 1. Čísla 3 a 2 to nemôžu byť, pretože číslo 3 sme už použili a 5 a 0 tiež nie, lebo 0 použiť nemôžeme. Bude to teda dvojica 4 a 1, ale zatiaľ nevieme v akom poradí. Skúsime ich doplniť obidvoma spôsobmi.

Potom musíme doplniť taktiež zvyšnú dvojicu čísel 5 a 2 tak, aby spĺňali podmienku, že súčet čísel v každom riadku je 2-krát väčší, ako súčet čísel v riadku pod ním. Takto dostane jediné dve možné doplnenia.

Odpoveď: Tabuľka môže mať vpísané čísla dvoma spôsobmi, tak ako ukazujú obrázky 2 a 3.

Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký. Väčšina z vás ho riešila podobným spôsobom ako sme ukázali v tomto vzorovom riešení alebo skúšaním. V každom prípade ste sa dopracovali k správnemu výsledku. Niektorí zle pochopili, že súčty v jednotlivých stĺpcoch sú tri po sebe idúce čísla. Body ste taktiež mohli stratiť, ak ste nevysvetlili poriadne postup.

Príklad č. 6 (opravovali Monča, Paťka):

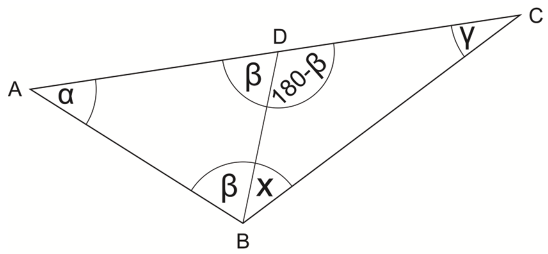
Označme si vnútorný uhol trojuholníka ABC (na obrázku 4) pri vrchole A ako α, pri C ako γ, taktiež $|\sphericalangle ABD|$ ako β. Našu neznámu $|\sphericalangle CBD|$ si označíme x.

Keďže úsečky AB a AD sú rovnako dlhé, trojuholník ABD je rovnoramenný. Pre uhly pri jeho základni teda platí, že sú rovnako veľké, takže si β môžeme označiť aj $\sphericalangle ADB$. Vieme, že body A, D, C ležia na jednej priamke, takže $\sphericalangle ADC$ je priamy, teda má veľkosť $180°$. $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADC|$, preto $|\sphericalangle BDC| = 180° - \beta$.

Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 30°$, teda $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| + 30°$, v našom označení $\beta + x = \gamma + 30°$. Z tejto rovnice si vyjadríme γ. $\gamma = \beta + x - 30°$.

Súčet vnútorných uhlov každého trojuholníka je $180°$, preto aj v trojuholníku BCD platí, $x + \gamma + (180° - \beta) = 180°$. Do tejto rovnice teraz dosadíme γ a vyjadríme x.

$$\begin{aligned} x + \gamma + 180° - \beta &= 180° \\ x + (\beta + x - 30°) + 180° - \beta &= 180° \\ 2x + 150° &= 180° \\ 2x &= 30° \\ x &= 15° \end{aligned}$$



Obrázok 4: trojuholník ABC

Odpoveď: Veľkosť uhla CBD je 15°.
Komentár: Tak vidíte, príklad mal jednoduché riešenie. Asi ste sa zľakli geometrie, pretože nám ho odovzdalo len málo z vás. Mohli ste to aspoň skúsiť, určite by ste nejaké body dostali. Tí, čo ste príklad odovzdali, ste to mali väčšinou správne, z čoho vyplýva, že geometria nie je až taká zlá ako si niektorí myslíte. Nabudúce to určite skúste.

Príklad č. 7 (opravovali Peťo, Jančo):

Vieme, že každý z bratov pomenoval svojich psov po nejakých svojich dvoch bratoch, takže ani jeden pes nemá rovnaké meno ako jeho majiteľ. Ani psy jedného majitela sa nevolajú rovnako. Ďalej vieme, že žiaden z Andyho psov sa nevolá Dano a nemôže sa volať ani ako jeho pán, tak sa jeho psy určite volajú Belo a Cyro. Keďže sa ani jeden z Cyrových psov nevolá Andy a tiež sa nemôže volať ako pán, ostáva nám len možnosť, že sa volajú Belo a Dano.

Zostávajú nám ešte mená psov Andy, Andy, Cyro a Dano a bratia Belo a Dano. Keďže psy, ktoré patria tomu istému majiteľovi sa nemôžu volať rovnako, musia mať Dano aj Belo každý práve jedného psa, ktorý sa volá Andy, lebo v opačnom prípade by mal jeden z nich psy s rovnakým menom. Stále máme podmienku, že meno psa a majiteľa je rôzne. Tým pádom sa Danov druhý pes (nie s menom Andy) nesmie volať Dano, ostáva nám teda preňho meno Cyro. Pre Belovho druhého psa ostáva meno Dano, lebo už len to jediné nám zostalo.

Čo sme zatiaľ zistili:

- Andyho psy sa volajú Belo a Cyro,
- Belove psy sa volajú Andy a Dano,
- Cyrove psy sa volajú Belo a Dano,
- Danove psy sa volajú Andy a Cyro.

Už poznáme mená psov patriacich chlapcom. Prejdime teda k určeniu rasy psíkov. Zo zadania vieme, že Belo nevlastní labradora a že žiaden z bratov nevlastní dva psy rovnakého plemena. Takže Belo musí vlastniť kóliu a dalmatína. Tiež vieme, že žiadna kólia sa nevolá Andy, čiže Belova kólia sa musí volať Dano, lebo Belove psy sa volajú Andy a Dano. Jeho dalmatín sa potom volá Andy.

Vieme, že na výstave boli tri labradory. Keďže Belo nemá labradora, musia ho mať všetci ostatní bratia, čiže Andy, Cyro a Dano majú každý jedného labradora. Keďže ani jeden labrador sa nevolá Dano, Cyrov labrador sa musí volať Belo, lebo Cyro má psov Bela a Dana. Cyrov ďalší pes sa volá Dano a môže to byť už iba kólia, alebo dalmatín. Labradora už nemôže mať, pretože by mal dvoch psov rovnakého plemena. Kólia nemôže byť Cyrovým psom, pretože by sa musela volať Dano, ale Belo už má kóliu, ktorá sa volá Dano (žiadne dva psy rovnakého plemena nemajú rovnaké meno), čiže jeho druhým psom je dalmatín a volá sa Dano.
Odpoveď: Dalmatína vlastnia Belo a Cyro, a ich mená sú Andy a Dano.
Komentár: Väčšina z vás postupovala veľmi podobne, aj keď ste potom ešte pokračovali ďalej a napísali ste aj ako sa volajú kólie a labradory. Nebolo to síce treba, ale aspoň bolo vidno, že ste sa nad príkladom zamysleli. Skoro všetci, až na pár ľudí, ste to mali na desať bodov, len je trocha škoda, že tento príklad neposlali viacerí, pretože podľa riešení, ktoré sme mali bol tento príklad ľahký a mohli ste ľahko získať desať bodov.

Príklad č. 8 (opravovali Palo, Maťo):

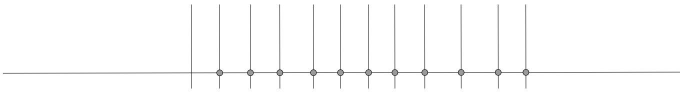
A (okrem Gamče): Úlohy v oboch častiach sa splniť dali, takže si len ukážeme riešenia na obrázkoch 5 a 6. Tým, ktorí sa chcú dozvedieť niečo viac o tomto príklade, odporúčam prečítať si aj vzorák B-čka. A pre tých, čo si ho prečítajú – skúste vytvoriť z 11 bodov 68 častí roviny :)

B (pre Gamču): Na obrázku 7 si nakreslíme pravouhlú sieť, ktorá je tvorená x vodorovnými a y zvislými priamkami (to, že na obrázku sú nejaké konkrétne x a y nás nebude zaujímať).

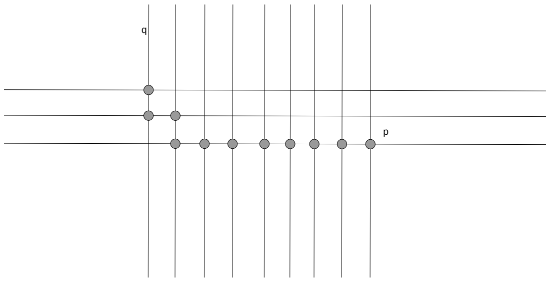
Z obrázku je zjavne vidieť, že počet útvarov, ktoré sú ohraničené si vieme vypočítať veľmi jednoducho, konkrétne $P_O = (x-1)\cdot(y-1)$. Podobne si vieme odvodiť aj počet neohraničených útvarov – všetky až na 4 rožné, (ktoré sú vždy práve 4 a tak ich započítame samostatne) majú práve jednu hranu spoločnú s jedným útvarom na obvode ohraničeného útvaru. To znamená, že týchto útvarov bude $P_N = (x-1)+(y-1)+(x-1)+(y-1)+4 = 2x+2y$.

Z toho dostávame dve rovnice o dvoch neznámych, ktoré treba vyriešiť:

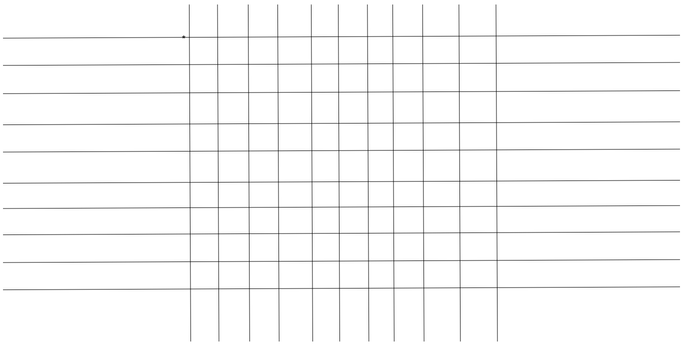
$$(x-1)\cdot(y-1) = 88 \qquad (1)$$
$$2x+2y = 42 \qquad (2)$$



Obrázok 5: 26 častí



Obrázok 6: 40 častí



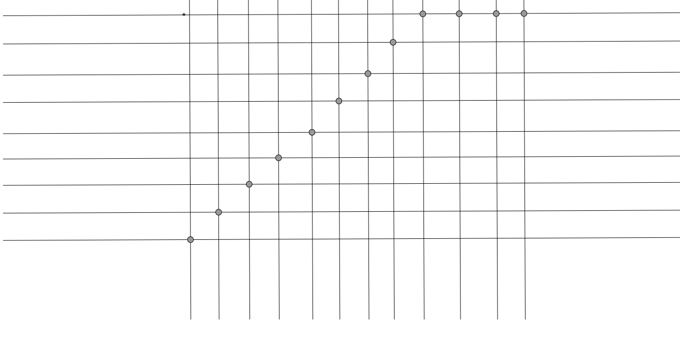
Obrázok 7: Sieť

Z rovnice 2 si vyjadrime neznámu y pomocou x a toto vyjadrenie dosadíme do rovnice 1:

$$\begin{aligned} x+y &= 21 \\ y &= 21-x \\ (x-1)\cdot((21-x)-1) &= 88 \\ (x-1)\cdot(20-x) &= 88 \\ -x^2+21x-20 &= 88 \\ x^2-21x+108 &= 0 \\ (x-9)\cdot(x-12) &= 0 \end{aligned}$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu, ktorej riešenia sú (či už odvodené zo súčinového tvaru, alebo zo vzorca) $x_1 = 9$ a $x_2 = 12$, ku ktorým prislúchajú hodnoty $y_1 = 21 - x_1 = 12$ a $y_2 = 9$. Nám je úplne jedno, koľko je zvislých a koľko vodorovných priamok, obrázok si stačí otočiť. Bez ujmy na všeobecnosti, (alebo BUNV, veľmi často používaná skratka v riešeniach MO) si teda povedzme, že $x = 9$ a $y = 12$.

Minimálne koľko bodov potrebujeme na to, aby sme tak dostali 9 vodorovných a 12 zvislých priamok? Každý bod, ktorý pridáme k existujúcim nám pridá *maximálne* jednu vodorovnú a jednu zvislú priamku (môže ich pridať aj menej, ale určite nie viac). To znamená, že keď potrebujeme vytvoriť 12 zvislých priamok, potrebujeme na to aj minimálne 12 bodov. Tie nám zároveň dokážu určiť aj 9 vodorovných priamok, ako je to nakreslené na obrázku 8.



Obrázok 8: Riešenie

Odpoveď: Najmenej mohlo byť zvolených 12 bodov.
Komentár: Väčšina z vašich riešení bola perfektná, 10 bodová. Takmer všetci ste mali krásne napísané postupy, čo je asi najdôležitejšia súčasť všetkých rieškarských príkladov. Chválime vás. A tým, ktorí na plný počet bodov nedosiahli, želáme viac šťastia v poslednej sérii.

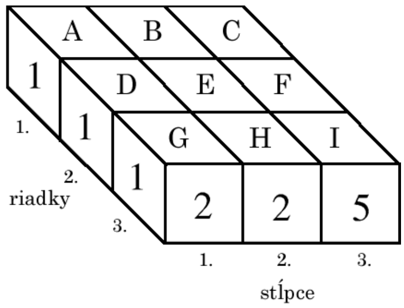
Príklad č. 9 (opravovala Natali):

Zrejme každý, kto chce vyriešiť tento príklad, začne tým, že si zloží kocku podla plániku v zadaní. Na tejto kocke sú oproti sebe čísla 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4.

V ľavom stĺpci videl Emil spredu číslo 2 a zozadu 5, takže v tomto riadku by teoreticky mohla byť iba jedna kocka. V strednom stĺpci videl spredu číslo 2 a zozadu 4. Kocka, ktorú videl spredu, mala na prednej stene číslo 2, takže na zadnej stene mala číslo 5. Preto musí byť za touto kockou ešte aspoň jedna, ktorá bude mať na zadnej stene číslo 4. V strednom stĺpci musia byť aspoň dve kocky. V pravom stĺpci vidí Emil spredu číslo 5 a zozadu 6, ktoré na kocke nie sú oproti sebe, takže aj v tomto stĺpci musia byť aspoň dve kocky. Kociek máme iba 5. V druhom a treťom stĺpci musia byť práve dve kocky, v prvom jedna.

V prvom riadku vidíme zľava číslo 1, sprava 2. Tieto dve čísla nie sú na kocke oproti sebe, takže v tomto riadku musia byť aspoň dve kocky. To isté platí aj o treťom riadku, v ňom vidno čísla 1 a 4. Len v druhom riadku stačí ak bude jedna kocka. Tu vidíme čísla 1 a 6, ktoré sú oproti sebe. Keďže kociek je iba 5, v prvom a treťom riadku budú práve dve a v druhom bude práve jedna kocka. Teraz zistíme, kde presne môžu byť. Pre zjednodušenie si označíme miesta na plániku písmenkami od A po I ako v tabuľke (pohľad z vrchu):

A	B	C
D	E	F
G	H	I



Obrázok 9: Pre lepsiu predstavu

Na mieste C bude kocka určite. Ak by tam nebola, musia byť kocky na miestach F a I. To by sme na kocke na mieste F videli zozadu číslo 6 a sprava číslo 6. Každý uzná, že to nie je možné.

Ak bude kocka na mieste A, zvyšné miesta ľavého stĺpca musia zostať prázdne a taktie6 miesto B musí zostať prázdne. V treťom riadku musia byť kocky na miestach H aj I, v druhom stĺpci na miestach E aj H. Máme teda 5 kociek na miestach A, C, E, G, H. V každom riadku, aj stĺpci je taký počet kociek, aký tam má byť. Každú kocku vidíme z minimálne dvoch susedných bočných strán, takže číslo na vrchnej stene je tým presne určené:

3		3
	5	
	3	1

Ak na mieste A nebude kocka, musí byť na mieste B. V druhom riadku máme tri možnosti. Ak bude kocka na mieste D, zvyšné dve musia byť na H a I. Ak bude na mieste E, zvyšné dve musia byť na G a I a ak bude na mieste F, zvyšné dve musia byť na miestach G a H. A opäť je presne určené, aké čísla sú na vrchnej stene:

	5	3
3		
	3	1

	5	3
	3	
3		1

	5	3
		4
3	6	

Odpoveď: Sú 4 možnosti, ako mohli vyzerať zhora Emilove kocky.
Komentár: Len dvaja z vás dostali za tento príklad 10 bodov. Vám gratulujem:). Ostatným som body strhávala hlavne preto, že ste našli iba jednu z možností a stačilo vám to. Takže postup „skúšam, až kým mi to nebude pasovať" nie je to najlepšie, čo môžete urobiť. Všeobecne vo všetkých príkladoch treba hľadať všetky možnosti. Tak držím palce v trtej sérii, snáď vám to pôjde lepšie.

Prémia (opravovali Emil, Juro):

Keďže sa profily nesmú nadstavovať a dĺžka strany každého okna sa musí dať napísať v celých metroch, tak okná môžu mať rozmery (v metroch) 4×4, 3×3, 2×2 alebo 1×1. Je dobré si uvedomiť, že čím je okno väčšie, tým je výhodnejšie. Napríklad pri okne veľkosti $4\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ (ďalej okno 4×4) minieme $16\,\mathrm{m}$ profilu na plochu okna $16\,\mathrm{m}^2$, kým pri okne 1×1 sa minú $4\,\mathrm{m}$ profilov a jeho plocha je iba $1\,\mathrm{m}^2$. Budeme sa preto snažiť použiť čo najviac okien 4×4.

Postupne pritom vyskúšame viacero možností, ktoré si budeme zapisovať do tabuľky 1. Nakoľko celková plocha okien má byť $80\,\mathrm{m}^2$, je zrejmé, že okien 4×4 tam môže byť maximálne 5. Avšak už týchto 5 okien má celkovú plochu $80\,\mathrm{m}^2$ a preto ich v dome musí byť menej ako 5 (lebo v dome musí byť až 10 okien).

Ak by boli v dome 4 okná 4×4, tak zaberú plochu $64\,\mathrm{m}^2$. Ostatné okná, teda spolu môžu zaberať plochu $16\,\mathrm{m}^2$. Preto tam môže byť maximálne jedno okno 3×3 (zaberá $9\,\mathrm{m}^2$). Zvyšné okná teda môžu zaberať plochu $7\,\mathrm{m}^2$ (16-9). To znamená, že tam môže byť maximálne jedno okno 2×2 (zaberá $4\,\mathrm{m}^2$). Pre zvyšné okná ostáva plocha $3\,\mathrm{m}^2$. No a takúto plochu zaberajú práve 3 okná 1×1. Okná, ktoré sme použili (štyri 4×4, jedno 3×3, jedno 2×2, tri 1×1) síce zaberajú plochu $80\,\mathrm{m}^2$, ale je ich iba 9, čo by majiteľom nevyhovovalo. Skúsime preto nepoužiť žiadne okno 2×2. Pre najmenšie okná nám ostane celých $7\,\mathrm{m}^2$. Avšak už sme použili 5 okien a preto okien 1×1 môže byť maximálne 5 (keďže okien má byť 10). Tie ale zaberú iba $5\,\mathrm{m}^2$ a teda 10 použitých okien bude mať celkovú plochu iba $78\,\mathrm{m}^2$, čo opäť nevyhovuje zadaniu. Ak by sme nepoužili ani jedno okno 3×3, tak pre okná 2×2 a 1×1 by ostala voľná plocha $16\,\mathrm{m}^2$. Okná 2×2 môžeme použiť maximálne štyri (každé z nich zaberá $4\,\mathrm{m}^2$). Aj v tomto prípade by použité okná (štyri 4×4 a štyri 2×2) zaberali plochu $80\,\mathrm{m}^2$, avšak je ich len osem. Skúsime preto použiť menej okien 2×2. Ak použijeme iba 3 tieto okná, pre okná 1×1 ostane plocha $4\,\mathrm{m}^2$. Avšak už sme použili 7 okien a tak najmenšie okná môžeme použiť iba 3. Tie ale zaberú spolu iba $3\,\mathrm{m}^2$ a preto týchto 10 použitých okien (štyri 4×4, tri 2×2, tri 1×1) má celkovú plochu iba $79\,\mathrm{m}^2$. Ak by sme použili ešte menej okien 2×2, tak 10 použitých okien by malo ešte menšiu celkovú plochu a preto o týchto možnostiach nemusíme uvažovať. V dome teda nemôžu byť ani štyri okná 4×4.

Ak použijeme tri okná 4×4, tak tieto zaberú plochu $48\,\mathrm{m}^2$. Ostatné okná, teda spolu môžu zaberať plochu $32\,\mathrm{m}^2$. Aj v tomto prípade budeme postupovať podobne. Najprv sa budeme snažiť použiť čo najviac okien 3×3, doplníme ich najväčším možným počtom okien 2×2 a do celkovej plochy $80\,\mathrm{m}^2$ alebo do počtu 10 okien ich doplníme oknami 1×1. Ak budú mať použité okná celkovú plochu $80\,\mathrm{m}^2$, ale bude ich menej ako 10, skúsime použiť o jedno okno 2×2 menej. Ak bude okien 10, ale ich celková plocha bude menšia ako $80\,\mathrm{m}^2$ (tu nám nahradzovanie okien 2×2 oknami 1×1 nepomôže), tak skúsime použiť o jedno okno 3×3 menej a viac okien 2×2. Ak bude totiž použitých menej okien 1×1, môže sa celková plocha zväčšiť. Ak sa nám stane, že sme ešte žiadne okno 1×1 nepoužili a už sme použili 10 okien s plochou menšou ako $80\,\mathrm{m}^2$, tak nám náhrada okien 3×3 oknami 2×2 určite nepomôže (plocha okien bude ešte menšia). Skúsime preto znížiť počet použitých okien 4×4 a zvýšiť tak počet okien 3×3, čo pri zmenšení počtu malých okien môže priniesť väčšiu plochu.

Takýmto spôsobom postupne prejdeme všetky reálne možnosti a nájdeme až tri, ktoré vyhovujú zadaniu. Pri prvej sa použijú 3 okná 4×4, 2 okná 3×3, 3 okná 2×2 a 2 okná 1×1. Na každé z okien 4×4 sa použijú 4 profily. Na okná 2×2 stačia dva profily (každý rozrežeme napoly, teda sa použije na dve strany okna). Na okno 3×3 musíme použiť tiež 4 profily, lebo síce z výroby každej jeho strany nám meter profilu ostane, ale kvôli nemožnosti nadstavovať nemôžeme spojiť tri takéto zvyšky do štvrtej strany. Zvyšky však môžeme použiť na okná 1×1, preto ak týchto bude menej ako okien 3×3, tak na nich neminieme žiadne ďalšie profily. Pri prvej možnosti, teda minieme $3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 26$ profilov. Pri druhej možnosti, teda 2 okná 4×4, 5 okien 3×3 a 3 okná 1×1, minieme $2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 28$ profilov, čo je viac ako v prvom prípade. Pri tretej možnosti, teda 8 okien 3×3 a 2 okná 2×2, minieme $8 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 34$ profilov, čo je najviac. Najvýhodnejšia je teda prvá možnosť.

Odpoveď: Architekt by mal navrhnúť 3 okná 4×4, 2 okná 3×3, 3 okná 2×2 a 2 okná 1×1.

Komentár: Len zopár z vás sa neuspokojilo s nájdením iba jednej možnosti usporiadania okien. Viacerí z vás išli podobným postupom ako je vo vzorovom riešení, avšak keď našli prvú možnosť, ktorá na ich šťastie bola správna, uspokojili sa s týmto výsledkom a vyhlásili ho za správny. Treba si však uvedomiť, že to, že okná 4×4 sú najvýhodnejšie neznamená, že riešenie, pri ktorom sa ich použije najviac bude to najvýhodnejšie. Okná 3×3 sú totiž stále výhodnejšie ako menšie okná a preto je nutné overiť, či pri použití menšieho počtu okien 4×4, ale zato väčšieho počtu 3×3 (a minima malých okien) nezískame výhodnejšiu možnosť. Napriek tomu sme však tým, ktorí svoj postup poriadne vysvetlili, dali 6 bodov. Za nedostatočné vysvetlenie postupu sme strhávali od jedného do troch bodov. Ak ste napísali len správnu možnosť a nenapísali ste ako ste ju hľadali, dostali ste 2 body.

4×4	3×3	2×2	1×1	obsah	počet okien
5	0	0	0	80	5
4	1	1	3	80	9
4	1	0	5	78	10
4	0	4	0	80	8
4	0	3	3	79	10
3	3	1	1	80	8
3	3	0	4	79	10
3	2	3	2	80	10
3	1	5	1	78	10
3	0	7	0	76	10
2	5	0	3	80	10
2	4	3	0	80	9
2	4	2	2	78	10
2	3	5	0	79	10
1	7	0	1	80	9
1	6	2	1	79	10
1	5	4	0	77	10
0	8	2	0	80	10

Tabuľka 1: Skúšame možnosti