

Zadania 1. kola letnej série 2008/2009

Termín: 09.03.2009

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 815 69 Bratislava 1

Už tri roky bol profesor Peter Kirling v Egypte. Uprostred púšte pátral po tritisíc rokoch starom chráme. Na prvý pohľad to vyzeralo ako veľké zúfalstvo. Veď kto so zdravým rozumom by tri roky strávil v púšti bez rodiny a priateľov?

Skutočne jediným vysvetlením pre tamojších obyvateľov bolo, že sa pomiatol. A profesorovi bolo naozaj jedno, čo si o ňom myslia. Jeho jediným cieľom bolo nájsť tajný zvitok, pomocou ktorého by dokázal zachrániť život svojho otca. Bol to jediný blízky človek na celom svete, ktorého mal. Jeho mama zomrela pri pôrode a tak ho otec vychoval sám. Keďže pracoval v múzeu, nemal príliš veľa času a ani peňazí, a tak vodieval svojho malého syna so sebou do práce. Peter si obľúbil históriu. Najväčšiu radosť mal, keď mu otec dovolil prehrabávať sa v starých zvitkoch ešte z čias starovekého Egypta. Jeden z nich ho obzvlášť zaujal. Písalo sa v ňom o obchodníkovi, ktorý na smrteľnej posteli rozprával o tajnej spoločnosti, o elixíre, ktorý navracia život, o tom ako zvitky s časťami tajného receptu ukrýl v rôznych kútoch sveta pri svojich cestách. Spýtal sa na to aj svojho otca a ten mu rozpovedal legendu.

Kedysi dávno vzniklo tajné spoločenstvo alchymistov. Ich cieľom bolo nájsť nejakú hojivú masť, ktorá by pomohla pri akomkoľvek zranení. Založil ho pomerne majetný človek, ktorý mal chuť vydobýť si veľké územie, ale nechcel prísť o svoje peniaze, a taktiež sa bál smrti. A tak zhromaždil skupinu vzdelancov, ktorých presvedčil o dobrých úmysloch, hlavne, že to má byť nápomocné všetkým. Avšak keď sa im už podarilo nájsť tento liek, uvedomili si, že nemôže ktokoľvek držať v rukách takúto moc. Rozhodli sa preskúšať každého, kto má poznať toto tajomstvo, troma úlohami.

Príklad č. 3A (okrem Gamče): Vedľa seba sú tri skrinky, z toho v dvoch sú choroby a strasti a v jednej je múdrosť a poznanie. Na skrinkách sú takéto nápisy:

1. „V tejto skrinke sú choroby a strasti.“
2. „V tejto skrinke je múdrosť a poznanie.“
3. „V druhej skrinke sú choroby a strasti.“

Kde je múdrosť a poznanie, ak je najviac jeden z nápisov pravdivý?

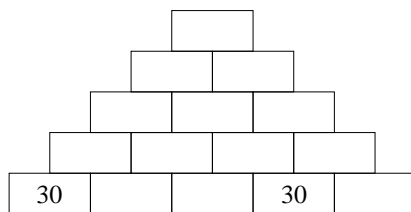
Príklad č. 3B (pre Gamču): Pri sebe sú tri skrinky, z toho v dvoch sú choroby a strasti a v jednej je múdrosť a poznanie. Nápis na skrinke, ktorá obsahuje múdrosť a poznanie je pravdivý, z ostatných dvoch nápisov je aspoň jeden nepravdivý:

1. „V druhej skrinke sú choroby a strasti.“
2. „V tejto skrinke sú choroby a strasti.“
3. „V skrinke číslo 1 sú choroby a strasti.“

Kde je múdrosť a poznanie?

Ak si vybrali správne, v skrinke našli kamennú truhličku, ktorej vrchnák tvorila poschodová pyramída, a zospodu skrinky bol takýto nápis:

Príklad č. 5: (opravené zadanie) Na obrázku 1 je nakreslená päťposchodová pyramída zložená z tehličiek. Na každej tehličke má byť napísané jedno číslo. Pritom musí platiť, že ak tehlička stojí na iných, tak jej číslo je súčtom čísel tehličiek, na ktorých stojí. Okrem čísel, ktoré už sú na obrázku doplnené, vám ešte prezradíme nasledovné informácie: Súčet čísel na spodnom poschodí je 155, na druhom poschodí 236, na treťom je to 341 a na štvrtom 446. Doplňte pyramídu a nájdite všetky možnosti.



Obrázok 1: Pyramída

Skrinka sa otvorila po správnom dopísaní všetkých čísel. Vnútri ležal papyrus s hádankou.

Prémia: Pavúk sedí presne v «*Hájny Grúň je v geografickom . . . Slovenska*» prednej steny kocky, ktorá sa vznáša nad zemou, s hranou dlhou «*Aké číslo električky od 1–14 okrem šestky nepremáva v Bratislave?*» cm. Rád by ulovil «*Horor z roku 1986 s Jeffom Goldblumom*», ktorá sedí na protiľahlej stene kocky (čiže na zadnej) tak, že jej vzdialenosť od spodnej aj pravej steny je «*Kolko eur je 30,126 koruny?*» cm. Popíšte presne, kadiaľ má pavúk liezť, aby ju čo najrýchlejšie chytil, keď vie loziť len po vonkajších stenách kocky.

(K riešeniu napíšte aj celé „doplnené“ zadanie.)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obrázok 2: Obyčajný štvorec

9	4		

Obrázok 3: Magický štvorec

Lenže tu sa ukázalo, aký v skutočnosti je tento majetný človek. Keď sa mu nepodarilo zložiť skúšku, uvážnil alchymistov. Chcel ich mučiť, kým mu neprezradia recept. Vtedy sa rozhodli, že tajomstvo rozdelia na štyri časti (štyri zvitky) a poveria niekoho, aby ich dobre ukryl, čo najďalej od seba. Potom mal napísať kľúč, ktorý by odhalil, kde sa nachádzajú. Samozrejme iba správnej osobe. No jediný, kto sa tejto úlohy mohol ujať bez toho, aby si ho niekto všimol, bol malý chlapec z ulice. Nebolo však inej nádeje a tak mu to vysvetlili a modlili sa, aby svoj sľub splnil a postaral sa o toto vzácne dedičstvo. Tu sa príbeh končil. Nikto nevedel, čo sa stalo s chlapcom ďalej.

Peter po čase zabudol. Trápili ho iné starosti. Zomieral mu otec. Mal nehodu, keď sa ponáhal na jeho promóciu. Pošmykol sa na ľade a nešťastne si udrel hlavu. Odvtedy ležal v kóme. Peter sa obviňoval a pracoval stále viac a viac, aby mohol zaplatiť drahú liečbu. Ale ani tá nepomáhala. Vtedy si spomenul na príbeh z detstva. Začal pátrať a po čase našiel viacero zvitkov o chlapcovi z tohto príbehu.

Krátko po tom, ako ho alchymisti poverili ukrytím zvitkov, sa ho ujal bohatý obchodník, ktorý nemal vlastné deti. Poskytol mu vzdelanie a výchovu. Keď dospel, už aj zabudol na dávny sľub alchymistom. No raz, keď sa prehrabával starými vecami, objavil tieto štyri zvitky. Na všetko si spomenul a rozhodol sa splniť toto posledné želanie odsúdencov. Mal zvláštny pocit, akoby nebola náhoda, že práve jeho v živote postretlo toľko šťastia iba chvíľu po tom, čo dal sľub. Precestoval veľa krajín a ukryl zvitky. Každý ukryl do schránky, ktorá sa otvorila iba po vyriešení úlohy na veku. Na sklonku svojho života zapísal svoj príbeh, v ktorom bol zakódovaný tajný odkaz, kde treba hľadať kľúč.

Peter rozlúštil kód a dostal sa až do Egypta. Tu narazil na menší problém. Z odkazu jasne vyplývalo, že kľúč sa má nachádzať v chráme, ktorý bol veľmi blízko chlapcovho bydliska. Problém bol v zistení miesta, v ktorom žil. Mal síce názov mesta, ale to už dávno zmizlo z povrchu zemskeho alebo sa premenovalo. Podľa opisu sa snažil v archívoch nájsť správny chrám. Prezeral tony a tony zvitkov. Nakoniec mu zostalo na výber asi šesť chrámov. Takže ich bolo treba všetky preskúmať. Chcel začať tými, ktoré ešte stáli, no zostal už iba posledný. A navyše jeho poloha nebola tak celkom známa. Nachádzal sa vo veľkom meste, no nedalo sa určiť kde presne. Na vykopávanie celého mesta nemal ani čas a ani prostriedky. Zozbieral čo najviac informácií o meste a podľa snímok sa pokúsil určiť približnú digitálnu podobu. Už stačilo vyrábať iba túto úlohu.

Príklad č. 8A (okrem Gamče): Na papieri je nakreslený osovo súmerný päťuholník s obsahom 45 cm^2 , ktorého vrcholy si označíme ako A, B, C, D a E (proti smeru hodinových ručičiek). Tento päťuholník má práve tri pravé uhly – pri vrcholoch A, B a D , a taktiež má práve jednu trojicu strán s rovnakou dĺžkou. Zistíte veľkosti zvyšných dvoch vnútorných uhlov tohto päťuholníka a dĺžku niektorej z trojice zhodných strán.

Príklad č. 8B (pre Gamču): Na papieri sú nakreslené dva päťuholníky, každý z nich je osovo súmerný a ich vrcholy sú označené ako A, B, C, D a E (proti smeru hodinových ručičiek). Oba päťuholníky majú práve tri pravé uhly – pri vrcholoch A, B a C . Každý päťuholník má tiež práve jednu trojicu strán s rovnakou dĺžkou, pri prvom päťuholníku tieto strany netvorí súvislý úsek, pri druhom áno. Zistíte veľkosti zvyšných dvoch vnútorných uhlov týchto päťuholníkov a dĺžku niektorej z trojice zhodných strán, ak prvý z nich má obsah 27 cm^2 a druhý $5 + 4\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Začal kopáť. Po pár dňoch narazil na základy a zhruba po týždni stál na odkrytých ruinách. Už ich prešiel celé, no nebolo ani známky po tajných dverách či chodbe. Až po chvíli si všimol na zemi štvorcovú sieť. Keď si pozornejšie prečítal nápisy, objavil úlohu. Pomyslel si, že možno to mu otvorí úkryt kľúča.

Príklad č. 9: Na obrázku 2 máme jeden obyčajný štvorec 4×4 , v ktorom sú postupne po riadkoch vpísané čísla od 1 do 16. Do druhého štvorca na obrázku 3 chceme tie isté čísla vpísať tak, aby platilo, že ak sú v jednom štvorci čísla a a b v tom istom riadku, stĺpci alebo uhlopriečke¹, nesmú byť v druhom štvorci v tom istom riadku, stĺpci, ani uhlopriečke. Takisto chceme, aby bol vzniknutý štvorec magický (t.j. aby bol súčet vo všetkých riadkoch, stĺpcoch aj oboch uhlopriečkach rovnaký).

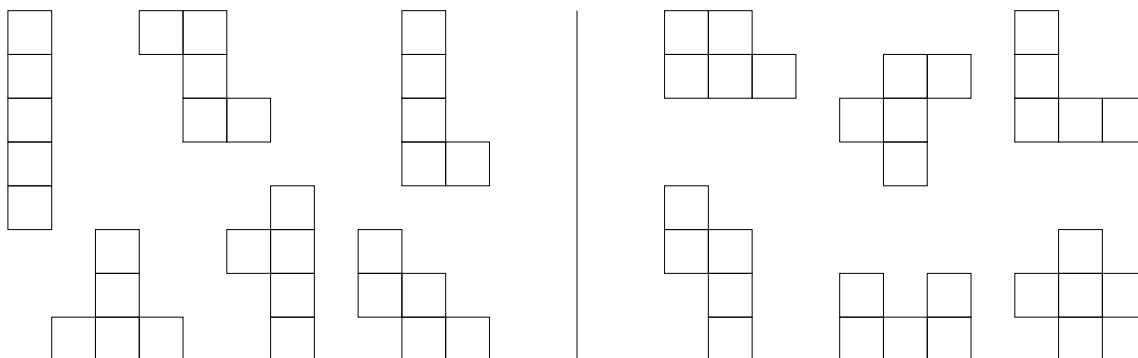
Zatriasla sa zem. Tesne vedľa jeho nôh sa otvoril vstup do podzemia chrámu. Peter chvíľu váhal a potom vošiel. Vôkol neho boli iba pavučiny, zatuchnutý vzduch a pod nohami sa to hmýrilo rôznymi potvorkami. Pred sebou uvidel dlhú chodbu. Na jej konci bola veľká hala. Akonáhle do nej vstúpil, vchod sa uzavrel. Bol v pasci! Dúfal, že tu bude aj ďalší východ. V hale objavil stolík, veľmi ho zaujalo to, čo na ňom uvidel.

Príklad č. 1: Pentomino obsahuje celkom 12 útvarov zložených z piatich štvorcíkov. Na obrázku sú tieto útvary rozdelené do dvoch skupín. Z každej zo skupín poskladajte obdĺžnik 5×6 (stačí jedna možnosť z každej skupiny). Časti pentomina môžete otáčať aj preklápať. Môžete si ich skúsiť vystrihnúť a skladať. Nakoniec nám nakreslite ako vyzerajú poskladané obdĺžniky.

Bez problémov zvládol splniť úlohu. Podobnými hrami ho totiž preskúšaval otec ešte keď bol malý. No nanešťastie tým asi spustil ďalšiu pascu. Začul hrmot, akoby sa niečo valilo priamo na neho. Zatiaľ nič nevidel, ale nemal z toho dobrý pocit. Chodbou sa začala valiť voda. Peter nemal šťastie. Začal sa topiť. Voda ho vyniesla až úplne ku stropu. Už si myslel, že je to jeho koniec, keď zbadal na strope hádanku.

Príklad č. 6: Nájdí najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa skladá len z cifier 0 a 1 a je bezo zvyšku deliteľné každým zo šiestich najmenších prirodzených čísel.

¹jedna uhlopriečka vedie z ľavého horného do pravého dolného rohu, druhá z pravého horného do ľavého dolného rohu



Obrázok 4: Dve skupiny pentomín

Horúčkovo rozmýšľal, no naozaj netušil, na čo mu to je dobré. Voda už zaplnila celú miestnosť a Peter sa dusil. Vtedy si všimol dva veľké panely s nulou a jednotkou. Z posledných síl vyfukal číslo. Začul výstrel, možno výbuch. Praskla stena a voda vytiekla. Otriasol sa a ťažko lapal dych. To bolo o chlp. No bolo treba pokračovať v hľadaní. Za prasknutou stenou sa nachádzala menšia miestnosť. Okrem jedného stolíka bola úplne prázdna. Na stolíku bola skrinka s hádankou.

Príklad č. 4: Janko už viac ako týždeň chodil každý deň na rybačku. Za ten čas zažil *tri rôzne* úrovne úspechu. Niektoré dni, ktoré zažil, boli obyčajné. V taký deň chytil práve 7 rýb. V niektoré dni sa mu darilo, v každý taký deň chytil rýb až 9. A niektoré dni boli zlé, vtedy ryby príliš nebrali. Jankovi sa ich v každý zlý deň podarilo uloviť len 5. Ak celkovo chytil 53 rýb, koľko zlých dní zažil?

Tešil sa, že sa konečne pohne vpred, no nanešťastie vnútri neležal zvitok papyrusu. Ležal tam stredoveký zvitok. Peter si ho prečítal. Nieкто ho predbehol, našiel všetky časti, ale nanešťastie to nebol žiadny hlupák, ukryl ich u seba v hrade. Takže sa náš milý profesor vydal na nové pátranie po akomsi rytierovi de Flamber. Jediné, čo o ňom zistil, bolo sídlo jeho rodu. Vydal sa do malej dedinky vo francúzskom Provence. Ubytoval sa v malom hostinci. Tam už mesiac podrobne študuje fotky z hradu. Najprv sa bol porozhliadnuť po ruínach. Našiel zopár úlomkov starých pečatí, krčahov, tanierov, zbraní a mince. Podzemie hradu bolo pomerne zachované. Množstvo chodieb, hladomorňa, pivnice. Úplne bežný hrad. Jediné, čo nášho profesora zaujalo, bol obraz popíjania vína a bujarej zábavy vo výčape. Pod maľbou bola zaujímavá hádanka.

Príklad č. 2: Unavení jedlom sa rytieri chopili džbánkov s medovinou. Borek vraví: „Plný džbán s medovinou váži poctivých 5 libier.“ „V rovnakých džbánkoch som videl v podhradí olej predávať a iba tri a pol libry vážil plný džbán,“ vraví Tomáš. „To je preto, že olej je dvakrát ľahší ako stará medovina,“ vysvetlil Odolen. A knieža dodal: „Konečne viem dosť, aby som mohol povedať koľko prázdny džbán váži.“ Koľko teda váži prázdny džbán? Ako to knieža zistil?

Raz večer, keď smutne sedel nad svojou polievkou, si k nemu prisadol čudný starček. Peter ho tu vídaval každý večer. Prihovoril sa mu:

„Mám informácie, ktoré by vás určite zaujímali.“ Peter pochyboval o tom, že by tento podivín mohol niečo vedieť. Ale vo svojom pátraní uviazol na mŕtvom bode. Počúval ďalej.

„Vy hľadáte informácie o istom rytierovi. Nemám pravdu?“

„Áno, nemýlite sa,“ odvetil Peter, „povedzte mi, čo viete,“ a prosebne pozrel na starca. Ten sa pousmial a hovorí:

„Informácie majú svoju cenu, to iste viete, keď ste profesor.“

„Čo za to chcete?“ nedočkavo sa opýtal Peter.

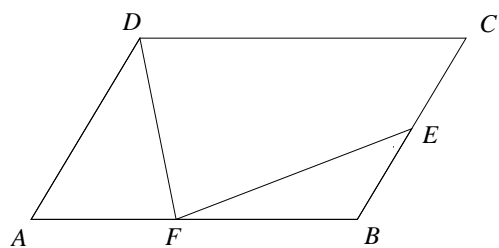
„Nuž, nepohrdol by som vašimi hodinkami.“ Peter sa zarazil. Na čo mu budú tie hodinky? Patrili jeho otcovi, takže nemal veľkú chuť ich dať cudziemu.

„Nechceli by ste radšej niečo iné?“ No starec zaryto krútil hlavou. Nepohlo ním nič. Chcel iba tie hodinky. Peter mu ich napokon dal, veď jeho otec by to určite pochopil. Starca neskutočne bavilo naťahovať ho a tak mu dal úlohu, ktorou sa vraj trápi už dlhé roky. Ak mu ju pomôže vyriešiť, povie mu všetko, čo vie. Hodinky si samozrejme nechá.

Príklad č. 7: Máme nakreslený rovnobežník $ABCD$ ako na obrázku 5. Bod E je stred strany BC . Na úsečke AB si zvolíme ľubovoľný bod F , rôzny od krajných bodov. Zistíte obsah trojuholníka CDF , ak viete, že obsah trojuholníka AFD je 15 cm^2 a obsah trojuholníka FBE je 14 cm^2 .

Dozvedel sa, že sídlo rodiny tohto rytiera bolo na hrade, kde pátral. Avšak on žil kdesi v Španielsku s rodinou svojej manželky. Dal mu aj konkrétnu polohu a odišiel. Peter sa zbalil a ponáhlal sa na letisko. Niežeby bol presvedčený o pravdivosti informácií, ktoré získal, no nemal čo stratiť.

V ten deň bolo skutočne otrasné počasie. Pršalo, nepríjemne fúkalo a bolo celkom chladno. No počas letu sa zhoršilo viac než hocikto predpokladal. Lietadlo muselo núdzovo pristáť niekde v Pyrenejách...



Obrázok 5: Rovnobežník $ABCD$