# Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2008/2009

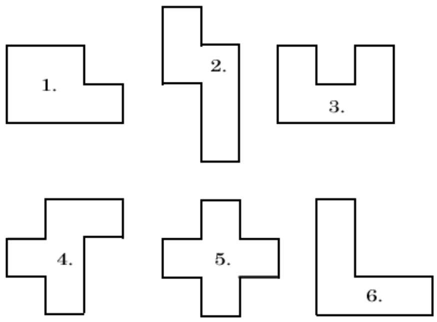
## Príklad č. 1 (opravovali Danielka, Marek):

Môžeme si útvary nakresliť a vystrihnúť, rukami niekedy vidíme lepšie:). S každým útvarom môžeme robiť v podstate dve veci: preklopiť ho (vodorovne a zvisle) a otočiť ho (doprava či doľava). Keď sa s útvarmi dosť dlho pohráte, zistíte, že niekedy postupnosťou preklopení a otočení dostanete pred očami opäť pôvodný útvar.

Poďme sa podrobnejšie pozrieť na postup pri skladaní pentomína z druhej skupiny útvarov. Všimnime si, že útvar číslo 5 nemôže byť v žiadnom prípade v rohu obdĺžnika. V takomto prípade, by sme už nedokázali pokryť jedno rohové políčko obdĺžnika (ten kríž nás blokuje). Začnime skladať napríklad z pravého dolného rohu obdĺžnika, kam umiestnime útvar číslo 6 otočený raz doľava (proti smeru hodinových ručičiek). Do opačného rohu, teda ľavý horný, skúsime umiestniť útvar číslo 1 otočený doprava. Vidíme, že sa nám pod neho celkom pekne hodí preklopený útvar číslo 2. Ďalej pokračujeme preklopením útvaru číslo 4 a následným otočením doľava. Ten umiestnime medzi útvary 6 a 2 kam presne zapadá. Do pravého horného rohu môžeme dať útvar číslo 3 dvakrát otočený doprava (alebo doľava, to je jedno). Teraz už len do voľného miesta akurát vložíme útvar číslo 5. Obdĺžnik $5 \times 6$ je hotový.

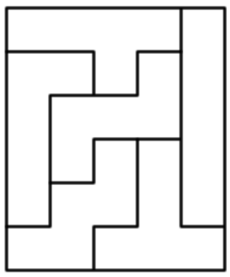
Poznámka: Všimnite si, že napríklad útvar číslo 5 ostáva rovnaký keď ho preklopíme aj keď ho otočíme. Taký útvar sa nazýva *symetrický*. Alebo útvar číslo 3: keď ho preklopíme zhora-dole (nožičkami dole), zmení sa, ale keď ho preklopíme zprava-doľava, dostaneme ten istý tvar. Ten už nie je symetrický, ale iba súmerný podľa jednej osi. Os je názov pre zvislú čiaru idúcu stredom toho útvaru. To sme sa niečo nové naučili :-)

Skúšaním a hraním sa s papierikmi iste objavíte aj postup pre prvú skupinu pentomín.

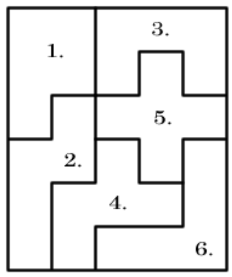



Obrázok 1: Zadanie druhej skupiny pentomín

**Odpoveď:** Riešení existuje pomerne dosť, preto nižšie uvádzame len jednu z možnosti ako to je správne.



Obrázok 2: Riesenie č. 1




Obrázok 3: Riesenie č. 2

**Komentár:** Príklad nebol ťažký, všetci ste sa úspešne dopracovali k správnym výsledkom. Je dobré aj napísať nejaké myšlienky toho skúšania (ak nejaké boli;-). Napríklad, že tento útvar dám do rohu, lebo sa mi zdá, že tam bude lepšie sedieť ako niekde v strede. Alebo, že tento je príliš divoký na to, aby bol na strane obdĺžnika, tak ani nebudem skúšať si ho tam položiť. Väčšina z vás od nás dostala 10 bodov, niektorým sme jeden bod strhli, ak ste nám poslali len obrázky dvoch obdĺžnikov bez akéhokoľvek vysvetlenia.

## Príklad č. 2 (opravovala Tinka):

Pre zjednodušenie riešenia si označíme medovinu ako $M$, olej ako $O$ a džbán ako $D$. Zo zadania si vyvodíme najdôležitejšie údaje:

1. $D + M$ vážia spolu 5 libier.
2. $D + O$ vážia spolu 3,5 libier.

3. $M$ je dvakrát ťažšia ako $O$. (Matematicky to zapíšeme: $M = 2 \cdot O$)

Podľa tretieho výroku vieme, že $M = 2 \cdot O$. Na základe tohto tvrdenia môžeme upraviť prvý výrok tak, že namiesto $M$ tam napíšeme $2 \cdot O$. Teraz máme v hre tieto dva výroky:

1. $D + 2 \cdot O$ vážia 5 libier.
2. $D + O$ vážia spolu 3,5 libier.

Keď si porovnáme tieto výroky, tak vidíme, že druhý sa od upraveného prvého líši o jedno $O$ a v rámci hmotnosti sa líšia o 1,5 libry. Z toho nám vyplýva, že $O = 1,5$ libry. Teraz už môžeme dopočítať $D$ a taktiež $M$. Keďže $D + O$ je 3,5 libry, tak $D$ váži 2 libry. Podobne, ak $D + M$ je 5 libier, potom $M$ váži 3 libry. Ako skúšku správnosti overíme, či je hmotnosť $M$ dvakrát väčšia ako $O$: $M/O = 2$. Platí.

**Odpoveď:** Džbán váži 2 libry.

**Komentár:** Tento príklad ste zvládli veľmi pekne, takmer všetci ste ho vyrátali správne. Vyskytovali sa malé nedostatky v riešeniach, za ktoré ste stratili bodík. Napríklad ste nevysvetlili, ako ste upravovali rovnice a ako ste sa k jednotlivým častiam dostali. Iný problém bol, keď ste príklad neodvodzovali postupne, ale skúšali ste náhodné čísla, prípadne ste napísali len správnu možnosť. Za takéto riešenie ste stratili viac bodov, lebo skúšanie nie je správny systém, kým nepreveríte všetky možnosti. Dúfam, že nabudúce budete mať všetci desať bodíkov.

## Príklad č. 3 (opravovali Zuzka, Betka):

**A (okrem Gamče):** Výroky na skrinkách dva a tri sú tvrdenia, ktoré sa navzájom vylučujú. To znamená, že práve jeden z nich je pravdivý (skrinka dva bude obsahovať buď choroby a strasti, alebo múdrosť a poznanie). Kedže podľa zadania môže byť na skrinkách najviac jeden nápis pravdivý (a už vieme, že buď na druhej, alebo tretej skrinke je pravdivý nápis), tak to znamená, že nápis na prvej skrinke musí byť klamstvo. Takže prvá skrinka obsahuje určite múdrosť a poznanie.

**Odpoveď:** Múdrosť a poznanie sú v prvej skrinke.

**B (pre Gamču):** V druhej skrinke nemôžu byť múdrosť a poznanie, pretože ak by v nej boli, tak by nápis na tejto skrinke, ktorý tvrdí, že sú v nej choroby a strasti musel byť pravdivý. A to by si protirečilo. Takže teraz vieme, že v druhej skrinke sú choroby a strasti, a teda že nápisy na prvej aj druhej skrinke sp pravdivé. Kedže zo zadania vieme, že aspoň jeden nápis na skrinke s chorobami a strasťami má byť nepravdivý (čiže aj celkovo musí byť na skrinkách aspoň jeden nepravdivý nápis) a mi už máme dva pravdivé, tak to znamená, že nápis na treťej skrinke musí byť klamstvo. Potom sú múdrosť a poznanie v prvej skrinke a choroby a strasti v tretej.

**Odpoveď:** Múdrosť a poznanie sú v prvej skrinke.

**Komentár:** Príklad bol pomerne ľahký, väčšina z vás ho zvládla. Iba občas sa objavili chybičky, keď niekto zabudol vylúčiť nesprávnu možnosť, alebo sme strhávali body, keď boli vaše riešenia príliš stručné a nejasné.

## Príklad č. 4 (opravoval etome):

Najpr si všimnime v zadaní dve podstatné veci, ktoré si veľa z vás nevšimlo. Janko zažil tri rôzne úrovne úspechu, teda z každého typu dňa aspoň jeden; Vieme, že chodil na rybačku viac ako týždeň, teda 8 a viac dní.

Zamyslime sa, koľko dní teda chodil na rybačku. Vieme, že každý deň ulovil nepárny počet rýb (5, 7 alebo 9).

Ak by chodil na rybačku párny počet dní (8, 10, 12. . . ), tak si jeho úlovky vieme rozdeliť do dvojíc. Dostaneme dvojice nepárnych čísel. Súčet dvoch nepárnych čísel je vždy párne číslo ($5 + 7 = 12$, $5 + 9 = 14$, $7 + 9 = 16$). Takže súčet v každej dvojici je párny a celkový počet rýb, súčet týchto párnych čísel, bude taktiež párny. Lenže my vieme, že Janko ulovil 53 rýb. Preto nemohol chodiť na rybačku párny počet dní.

Poďme sa pozrieť na nepárne počty dní (9, 11, 13. . . ). Všimnime si, že ak by Janko chodil na rybačku 11 dní, najmenej rýb by ulovil, ak by každý deň ulovil len 5 rýb. Dokopy by ich však ulovil až 55, čo je viac ako 53, ktoré ulovil. Keby chodil na rybačku ešte viac dní, bolo by to ešte viac rýb a teda tiež priveľa.

Ak je situácia s Jankom a rybačkou reálna a teda ak existuje nejaký počet dni, ktorý vyhovuje tomu ako to celé prebiehalo, bude to jedine 9 dní. Skúsime overiť, či je to možné a či nie je možné, že existuje viac možností koľko zlých dní mohol mať.

Vieme, že každý typ dňa zažil aspoň jeden krát. Preto môžeme od 53 rýb odčítať ryby chytené v týchto *troch* dňoch a pozrieť sa, aké úlovky mohol mať v zvyšných $9 - 3 = 6$ dňoch, kedy ulovil $53 - 5 - 7 - 9 = 32$ rýb.

**Dokončenie 1:** Zaujíma nás len počet jednotlivých typov dní. Poďme skúsiť rozdeliť týchto 6 dní medzi tieto tri typy dní.

Najprv si povedzme, že nemal žiadne zlé(Z) dni pri lovení týchto 32 rýb (už mal jeden, ktorý sme zarátali a už nemusí mať žiaden ďaľší, preto neskúšame žiadne zlé dni). Skúsme 6 zvyšných dní rozdeliť medzi obyčajné(O) a dobré(D) dni: môžeme mať 0O+6D, 1O+5D, 2O+4D, 3O+3D, 4O+2D, 5O+1D, 6O+0D. Ako sme si toto vypísali? Dali sme si pre jeden typ dňa čo najmenej, tj. 0, a pre druhý typ dňa čo najviac, tj. 6 a po jednom „prelievali“ dni z jedného do druhého, až kým už viac nešlo.

Teraz si povieme, že mal jeden zlý deň. A zvyšných 5 znova „prelievacím“ spôsobom rozdelíme medzi obyčajné a dobré dni, aby sme sa pozreli na všetky možnosti.

Potom si povieme, že mal dva, tri, štyri, päť a nakoniec šesť zlých dní. A spravíme to isté.

Takto sa pozrieme postupne na všetky možnosti počtov rôznych typov dní, ak dokopy chceme 6 dní. Zapíšeme si to do tabuľky 1 a pre každé si zrátame aký by mal úlovok. Zistili sme teda, že 32 rýb mohol uloviť len v jednom „rozložení“ dní.

Nezabudnime na tie dni, ktoré sme na začiatku odrátavali. Mal teda

**Odpoveď:** Mohol mať jedine $5 + 1 = 6$ zlých dní.

**Dokončenie 2:** Za zvyšných 6 dní najmenej mohol uloviť $6 \times 5 = 30$ rýb. Ale on ich ulovil viacej. Teda niektorý deň, alebo niektoré dni ulovil viac ako 5 rýb. Ak nahradíme jeden zlý deň obyčajným, zvýšime ulovok o $7 - 5 = 2$ a keď zlý dobrým, zvýšime úlovok o $9 - 5 = 4$. Potrebujeme úlovok zvýšiť z minimálnych 30 na 32 a to vieme pridaním dvoch (zmenením zlého

| zlých dní (5 rýb) | obyčajných dní (7 rýb) | dobrých dní (9 rýb) | úlovok | je to 32? |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 54 | nie |
| 0 | 1 | 5 | 52 | nie |
| 0 | 2 | 4 | 50 | nie |
| 0 | 3 | 3 | 48 | nie |
| 0 | 4 | 2 | 46 | nie |
| 0 | 5 | 1 | 44 | nie |
| 0 | 6 | 0 | 42 | nie |
| 1 | 0 | 5 | 50 | nie |
| 1 | 1 | 4 | 48 | nie |
| 1 | 2 | 3 | 46 | nie |
| 1 | 3 | 2 | 44 | nie |
| 1 | 4 | 1 | 42 | nie |
| 1 | 5 | 0 | 40 | nie |
| 2 | 0 | 4 | 46 | nie |
| 2 | 1 | 3 | 44 | nie |
| 2 | 2 | 2 | 42 | nie |
| 2 | 3 | 1 | 40 | nie |
| 2 | 4 | 0 | 38 | nie |
| 3 | 0 | 3 | 42 | nie |
| 3 | 1 | 2 | 40 | nie |
| 3 | 2 | 1 | 38 | nie |
| 3 | 3 | 0 | 36 | nie |
| 4 | 0 | 2 | 38 | nie |
| 4 | 1 | 1 | 36 | nie |
| 4 | 2 | 0 | 34 | nie |
| 5 | 0 | 1 | 34 | nie |
| 5 | 1 | 0 | 32 | ano |
| 6 | 0 | 0 | 30 | nie |

Tabuľka 1: Koľko ktorých dní mal ak ulovil 32 rýb

dňa na obyčajný). A toto je jediná možnosť. Pretože ak by sme jeden zlý zmenili na dobrý, už by to bolo priveľa a taktiež keby sme viaceré dni vymenili za lepšie, tak by to bolo priveľa. Toto nám dáva teda jedine 5 zlých a jeden obyčajný.

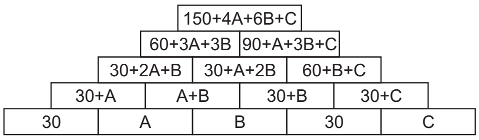
Ak k tomuto pripočítame po jednom dni z každého typu, ktorý sme na začiatku odobrali, dostávame, že jediná možnosť je: 6 zlých dní, 2 obyčajné a 1 dobrý.

**Odpoveď:** Mohol mať jedine 6 zlých dní.

**Komentár:** Tento príklad nebol až taký ľahký ako sa mohol na prvý pohľad zdať. Trebalo si všimnúť trochu skryté podmienky v zadaní. To sa dalo po pár prečítaniach. A veľmi dôležitým bolo ukázať, že iný počet ako 6 zlých dní nijako Janko mať nemohol.

### Príklad č. 5 (opravovali Monča, Gubika):

Vieme, že číslo na hociktorej tehličke sa rovná súčtu čísel na dvoch tehličkách pod ňou. Preto, ak si tehličky s neznámymi číslami v prvom riadku označíme písmenami A, B a C. Môžeme si pomocou týchto písmen vyjadriť hodnoty na tehličkách v ostatných riadkoch. Keď vypočítame hodnoty $A$, $B$ a $C$ na tehličkách v prvom riadku, ďalej už nás čaká len krátka cesta k dopočitaniu zvyšných hodnôt na tehličkách vo vyšších riadkoch.




Obrázok 4: Pyramída

Súčet čísel na tehličkách v prvom riadku je 155. Napíšme si to ako rovnicu a upravme ju.

$$\begin{aligned} 60 + A + B + C &= 155 \qquad / - 60 \\ A + B + C &= 95 \end{aligned}$$

Podobne si zostavíme takúto rovnicu aj z druhého riadku.

$$\begin{aligned} 90 + 2 \cdot A + 2 \cdot B + C &= 236 \qquad / - 90 \\ 2 \cdot A + 2 \cdot B + C &= 146 \end{aligned}$$

Teraz od upravenej rovnice súčtu čísel druhého riadku odpočítam rovnicu súčtu čísel prvého riadku.

$$(2 \cdot A + 2 \cdot B + C) - (A + B + C) = 146 - 95 \Rightarrow A + B = 51$$

Tehlička s hodnotou $A + B$ sa nachádza v druhom riadku, môžeme tam doplniť hodnotu 51. A keďže $A + B + C = 95$ vieme, že číslo na tehličke $C$.

$$C = 95 - (A + B) = 95 - 51 = 44$$

Zistili sme ďalšie číslo na tehličke, tak ho do pyramídy doplníme. Keďže teraz už vieme číslo na tehličke $C$ (44) a taktiež vieme číslo na susednej tehličke (30), tak môžeme dopočítať číslo ktoré je na tehličke nad nimi, $44 + 30 = 74$. Aj to dopíšeme do pyramídy. Pustíme sa to tvorby rovnice tretieho riadku.

$$\begin{aligned} 30 + A + A + B + A + B + 30 + B + 30 + B + 30 + C &= 341 \\ 120 + 3 \cdot A + 4 \cdot B + C &= 341 \qquad / - 164 \\ 3 \cdot A + 3 \cdot B + B &= 177 \\ 3 \cdot (A + B) + B &= 177 \\ 3 \cdot 51 + B &= 177 \qquad / - 3 \cdot 51 \\ B &= 24 \end{aligned}$$

Dopracovali sme sa k číslu na tehličke ozanačenou $B$. Dopíšeme ho. Teraz pomocou rovnice $A + B + C = 95$ zistíme $A$.

$$A + 24 + 44 = 95 \Rightarrow A = 27$$

Poznáme aj posledné číslo prvého riadku. Teraz už jednoducho dopočítame zvyšok pyramídy.

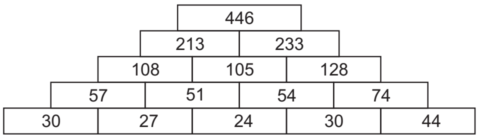
**Odpoveď:**

**Komentár:** Veľa z Vás malo skvelé riešenia, preto usudzujem, že príklad bol pre Vás ľahký. Body sme strhávali len vtedy, keď ste nám v strede riešenia povedali „a z tohto to už dopočítame“ čo nám nestačilo, lebo to bolo treba viac rozvinúť. Niektorí z Vás ste zas urobili malé chyby vo výpočtoch. Aj za to šli body dole. Nič to ale nemení na tom, že ste tento príklad vyriešili úžasne. Ste veľmi šikovní.

### Príklad č. 6 (opravovala Danka):

Naše číslo má byť deliteľné bezo zvyšku každým zo šiestich najmenších prirodzených čísel - teda má byť deliteľné 1,2,3,4,5 a 6.

Najprv si vypíšeme kritériá deliteľnosti pre jednotlivé čísla:




Obrázok 5: Pyramída

- 1 - každé prirodzené číslo je deliteľné jednotkou
- 2 - prirodzené číslo je deliteľné dvomi, ak je párne (končí na 0,2,4,6 alebo 8)
- 3 - prirodzené číslo je deliteľné tromi, ak je jeho ciferný súčet deliteľný tromi
- 4 - prirodzené číslo je deliteľné štyrmi, ak je jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi
- 5 - prirodzené číslo je deliteľné piatimi, ak končí na 0 alebo 5
- 6 - prirodzené číslo je deliteľné šiestimi, ak je deliteľné dvomi a súčasne tromi

Hľadáme najmenšie číslo, ktoré spĺňa tieto podmienky a skladá sa len z núl a jednotiek. Aby bolo deliteľné tromi, musí obsahovať aspoň 3 jednotky (aby bol jeho ciferný súčet deliteľný tromi). Uvažujme teda, že jednotky sú len tri, aby bolo číslo čo najmenšie. Dostaneme teda číslo 111. Chceme, aby bolo deliteľné aj dvomi a preto musí končiť nulou (lebo si môžeme vybrať len číslic z 0 a 1, ale jednotka je nepárna). Číslo končiace nulou bude deliteľné aj päťkou (to sme uviedli v kritériách). Dostaneme číslo 1110. To však nie je deliteľné štyrmi, lebo posledné dvojčíslie nie je deliteľné štyrmi bezo zvyšku (10 / 4 = 2,5). Preto musí byť posledné dvojčíslie 00. Vzniklo nám číslo 11100. Na záver je ešte dobré overiť, či je naozaj deliteľné všetkými číslami bezo zvyšku:

$$\frac{11100}{1} = 11100$$
$$\frac{11100}{2} = 5550$$
$$\frac{11100}{3} = 3700$$
$$\frac{11100}{4} = 2775$$
$$\frac{11100}{5} = 2220$$
$$\frac{11100}{6} = 1850$$

**Odpoveď:** Najmenšie hľadané prirodzené číslo je 11100.
**Komentár:** Výsledok mal takmer každý z vás dobre. Body som vám strhla, keď ste riešili príklad vypisovaním možností a nejaké ste vynechali, alebo keď ste nevysvetlili niektoré kritériá deliteľnosti. Nezabúdajte, že ak skúšate, je dôležité napísať, ako ste postupovali a v tomto príklade bolo tiež potrebné vysvetliť, prečo práve to číslo, ktoré ste našli, je najmenšie.

### Príklad č. 7 (opravovali anti, murko):

Zostrojíme si priamku bodom $F$ rovnobežnú so stranou $AD$ rovnobežníka. Jej priesečník so stranou $CD$ si označíme $X$ (pozri si obrázok 6).

Pozrime sa bližšie na vzniknutý rovnobežník $AFXD$. Úsečka $FD$ je uhlopriečka tohto rovnobežníka, to znamená, že ho delí na dva zhodné trojuholníky: $\triangle\, AFD$ a $\triangle\, FXD$. Obsah $\triangle\, AFD$ je rovný $15\,\mathrm{cm}^2$, teda aj obsah $\triangle\, FXD$ je rovný $15\,\mathrm{cm}^2$.

Teraz sa pozrime na pravú stranu, teda na rovnobežník $FBCX$. Výška z bodu $F$ trojuholníkov $FBE$ a $FEC$ je rovnaká (aj keď jej presnú dĺžku nepoznáme, ukáže sa, že ju nepotrebujeme). A základne $BE$ a $EC$ týchto trojuholníkov sú tiež rovnako dlhé, lebo bod $E$ je v strede strany $BC$. Z týchto dvoch vecí výplýva, že trojuholníky $FBE$ a $FEC$ majú rovnaký obsah: $14\,\mathrm{cm}^2$. (lebo obsah počítame ako dĺžka základne krát dľžka výšky a polovica z toho, a tieto dve dĺžky sú v týchto dvoch trojuholníkoch rovnaké)

Trojuholník $FBC$ je zložený z týchto dvoch trojuholníkov a zároveň je polovicou rovnobežníka $FBCX$ (lebo $FC$ je uhlopriečka), čiže trojuholník $FCX$ (druhá polovica rovnobežníka) má obsah $28\,\mathrm{cm}^2$.

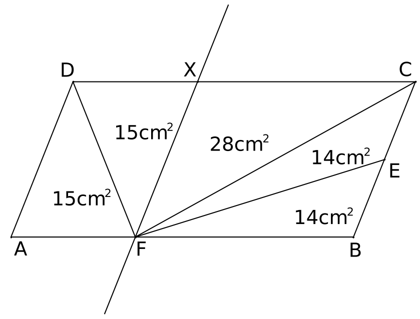
No a veľký objav: trojuholník $CDF$ je zložený z trojuholníkov $FXD$ a $FCX$, a teda jeho obsah je súčtom ich obsahov: $S_{\triangle CDF} = 15\,\mathrm{cm}^2 + 28\,\mathrm{cm}^2 = 43\,\mathrm{cm}^2$. Hotovo.

Poznámka: Viete že, obsah $\triangle\, CDF$ je rovný polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$. Prečo?
**Odpoveď:** Obsah trojuholníka $CDF$ je $14\,\mathrm{cm}^2$.
**Komentár:** Príklad bol veľmi ľahký a zvládli ste ho hravo. A dobrý tip pre tých, čo ho nevyriešili: nie je na škodu, skúsiť si do obrázka všeličo dokresľovať.

### Príklad č. 8 (opravovali Palo, Uľa):

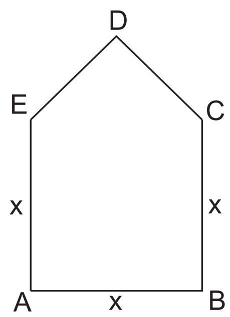
Z osovej súmernosti vo všetkých päťuholníkoch tohoto príkladu vieme, že dva „nepravé“ uhly sú rovnako veľké, čiže ich veľkosť je vo všetkých prípadoch

$$|\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle BCD| = \frac{540^\circ - |\sphericalangle EAB| - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CDE|}{2} = \frac{540^\circ - 3\cdot 90^\circ}{2} = 135^\circ$$




Obrázok 6: príklad 7: dokreslená rovnobežka

(súčet uhlov v 5-uholníku sme zistili tak, že sme si ho rozdelili na 5 trojuholníkov, ktoré mali spoločný vrchol niekde vnútri tohoto trojuholníka a od súčtu ich uhlov sme odpočítali plný uhol, ktorý tvorili v jeho strede - t.j. $5 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 540^\circ$).
**A (okrem Gamče):** Nepárny počet pravých uhlov a osová súmernosť značia, že táto os bude prechádzať práve jedným z týchto uhlov (dva sa totiž zobrazia na seba navzájom a poslednému neostáva kam inam sa zobraziť, ako sám na seba). Naše rovnaké uhly sú rozmiestnené tak, že tie dva sú vedľa seba a tretí je oproti nim, čiže os musí prechádzať cez uhol pri náprotivnom bode - čiže cez vrchol $D$ a potom cez stred úsečky $AB$. Ako tu však budú rozmiestnené 3 rovnaké strany (ich dĺžku si označíme $x$)? Jedna z nich bude určite medzi $A$ a $B$ (keďže sa zobrazí sama na seba), no zvyšné dve môžeme umiestniť na dve miesta ($BC$ a $EA$ alebo $CD$ a $DE$). Ak by zvyšné dve rovnaké strany boli strany $CD$ a $DE$, tak by útvar $CDE$ bol rovnostranným pravouhlým trojuholníkom, čo sa žiaľ nedá. To znamená, že v našom pätuholníku sú rovnaké strany $AB$, $BC$ a $EA$. Rozdelím




Obrázok 7: pätuholník

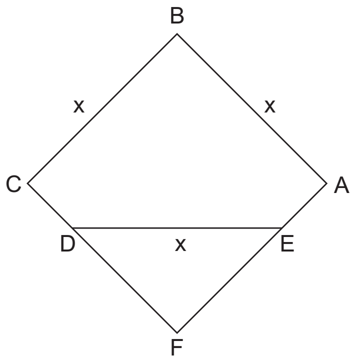
si tento päťuholník na štvorec $ABCE$ a rovnoramenný pravouhlý trojuholník $CDE$. Keď si v tomto trojuholníku zostrojím výšku na stranu $CE$, rozdelí stranu $CE$ na polovicu (nejakým bodom $S$) - pretože $CDE$ je rovnoramenný. Tým pádom nám vzniknú dva trojuholníky $ESD$ a $CSD$, ktoré sú tiež rovnoramenné (v oboch je jeden uhol pravý a druhý rovný $45^\circ$, čiže aj druhý musí byť rovný $45^\circ$), čo znamená, že $|CS| = |SD|$, čiže obsah trojuholníka $CDE$ je $S_{CDE} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$. O obsahu pätuholníka teda platí:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCE} + S_{CDE} \\ S &= x^2 + \frac{x^2}{4} \\ 45 &= \frac{5x^2}{4} \\ x^2 &= 36 \\ |x| &= 6 \end{aligned}$$

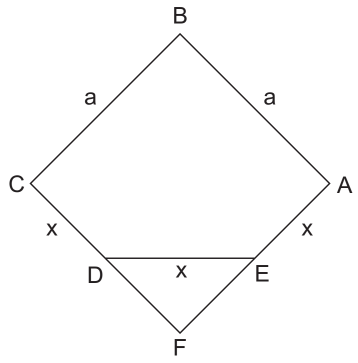
Vyšlo nám, že $x = \pm 6$. Výsledok $x = -6$ môžeme vylúčiť pretože dĺžka strany v tomto prípade nemôže byť záporná.
**Odpoveď:** Zvyšné dva vnútorné uhly majú veľkosť $135^\circ$ a dĺžka niektorej z troch zhodných strán je 6 cm.

**B (pre Gamču):** Nepárny počet pravých uhlov a osová súmernosť značia, že táto os bude prechádzať práve jedným z týchto uhlov (dva sa totiž zobrazia na seba navzájom a poslednému neostáva kam inam sa zobraziť, ako sám na seba). Naše rovnaké uhly sú rozmiestnené tak, všetky tri sú vedľa seba, čiže os musí prechádzať stredným z nich - čiže cez vrchol $B$ a potom cez stred úsečky $DE$. Tri rovnako dlhé strany však môžu byť rozmiestnené dvomi spôsobmi podľa zadania - buď tak, že budú tvoriť súvislý úsek, alebo tak, že nebudú:

Začneme prvým trojuholníkom (viď. Obrázok 8). Tri rovnaké strany sú $AB$, $BC$ a $DE$. Náš päťuholník si zjavne vieme doplniť do štvorca $ABCF$. Trojuholník $DEF$ je zjavne pravouhlý a rovnoramenný. Keď si v tomto trojuholníku zostrojím výšku na stranu $DE$, rozdelí ju na polovicu (nejakým bodom $S$) - pretože $DEF$ je rovnoramenný. Tým pádom nám vzniknú



Obrázok 8: 1. päťuholník



Obrázok 9: 2. päťuholník

dva trojuholníky $DSF$ a $ESF$, ktoré sú tiež rovnoramenné (v oboch je jeden uhol pravý a druhý rovný $45°$, čiže aj tretí musí byť rovný $45°$), čo znamená, že $|DS| = |SF|$, čiže obsah trojuholníka $DEF$ je $S_{DEF} = \frac{|DE|\cdot v_{DE}}{2} = \frac{x\cdot\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$. O obsahu pätuholníka teda platí:

$$\begin{aligned}
S &= S_{ABCF} - S_{DEF} \\
27 &= x^2 - \frac{x^2}{4} \\
x^2 &= 36 \\
|x| &= 6
\end{aligned}$$

Vyšlo nám, že $x = \pm 6$. Výsledok $x = -6$ môžeme vylúčiť pretože dĺžka strany v tomto prípade nemôže byť záporná.

Druhý päťuholník (viď. Obrázok 9) riešime podobne. Tri rovnaké strany sú $CD$, $DE$ a $EA$. Znova si predĺžme strany do štvorca $ABCF$. Aj v tomto prípade obsah trojuholníka $DEF$ bude $\frac{x^2}{4}$, no na výpočet obsahu štvorca $ABCF$ potrebujem mať vyjadrenú dĺžku jeho strany (označme si ju $a$). To môžeme napríklad pomocou sínusu uhla $\sphericalangle EDF$:

$$\begin{aligned}
\sin|\sphericalangle EDF| &= \frac{a-x}{x} \\
\frac{\sqrt{2}}{2}x &= a - x \\
a &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + x \\
a &= \frac{(\sqrt{2}+2)x}{2}
\end{aligned}$$

A teda o obsahu päťuholníka platí:

$$\begin{aligned}
S &= \left[\frac{(\sqrt{2}+2)x}{2}\right]^2 - \frac{x^2}{4} \\
S &= \frac{2x^2 + 4\sqrt{2}x^2 + 4x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \\
4\cdot(5+4\sqrt{2}) &= 5x^2 + 4\sqrt{2}x^2 \\
x^2 &= 4 \\
|x| &= 2
\end{aligned}$$

Podobne ako v prvom päťuholníku dĺžku strany $x = -2$ môžeme vylúčiť z rovnakého dôvodu.
**Odpoveď:** Zvyšné dva vnútorné uhly v oboch útvaroch majú veľkosť $135°$, dĺžka strany prvého pätuholníka je 6 cm a druhého 2 cm.
**Komentár:** S príkladom ste sa poväčšinou popasovali veľmi dobre, bodíky dole šli hlavne za nepochopenie zadania alebo za nedostatočné vysvetlenia. Preto máme pre vás dve rady, ktoré sa vám zídu pri ďalšom riešení - zadanie si prečítajte radšej desať krát, aby ste na nič nezabudli a v riešení píšte všetko, čo vás napadne, nečakajte, že si budeme veci domýšľať. Veľa šťastia pri ďlaších príkladoch.

### Príklad č. 9 (opravovali Maják, Peťo):

Aby som vedel správne vyplniť nový štvorec, musím si najprv vypočítať, aký má byť súčet v riadkoch, stĺpcoch a uhlopriečkach, pretože nový štvorec má byť magický. Keďže do nového štvorca dopĺňam tie isté čísla, ako boli v pôvodnom, stačí mi, aby som ich súčet vydelil 4 (pretože sú štyri riadky a v nich použijem všetky čísla). Dostanem, že súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch a uhlopriečkach má byť: $(1+2+3+\cdots+16) : 4 = 34$.

Čísla, ktoré sú v tabuľke 2 označené $a$ a $b$ nemôžu byť žiadne čísla, ktoré sú v pôvodnom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke, ako sú čísla 9 a 4. Keď si správne vyškrtám čísla, ktoré sú s 9 a 4 v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke, zistím, že tam môžu byť čísla 6, 14 a 15. Aby bol nový štvorec magický, musí byť súčet čísel $9 + 4 + a + b = 34$. Z tohto si viem vypočítať, čomu sa rovná súčet čísel $a$ a $b$: $a + b = 34 - 9 - 4 = 21$. Teraz si zistím, ktoré dve z možných čísel majú spolu súčet 21. Sú to čísla 6 a 15, lenže ešte neviem, ktoré bude na ktorom mieste. Číslo $c$ bude tiež číslo, ktoré nie je v pôvodnom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 4 a 9. Po správnom vyškrtaní mi zostane už iba číslo 14, pretože čísla 6 a 15 už plánujem použiť. Číslo $d$ bude číslo, ktoré nie je v pôvodnom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 6 a 15, pretože s jedným z nich je v druhom štvorci v rovnakom riadku a s druhým je v rovnakej uhlopriečke. Po správnom vyškrtaní čísel mi zostane jedine číslo 12, táto situácia je zachytená v tabuľke 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | a | b |
| | c | d | |
| | | | |
| | | | |

Tabuľka 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6\|15 | 15\|6 |
| | 14 | 12 | |
| | | | |
| | | | |

Tabuľka 3:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6\|15 | 15\|6 |
| | 14 | 12 | |
| | h | e | |
| j | i | g | f |

Tabuľka 4:

Označme si dalšie neznáme bunky, viď tabuľku 4. Číslo $e$ bude číslo, ktoré nie je v prvom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 9, 12 a 14, pretože s číslom 12 je v druhom štvorci v rovnakom riadku a s číslami 9 a 14 je v rovnakej uhlopriečke. Po správnom vyškrtaní čísel mi zostane číslo 3. Číslo $a$ je číslo 6, pretože číslo 15, ktoré tam ešte môže byť, je v prvom štvorci v rovnakom stĺpci ako číslo 3 a číslo $b$ je číslo 15. Súčet čísel prvej uhlopriečky $9+14+3+f = 34$. Z tohto viem, že číslo $f = 34 - 9 - 14 - 3 = 8$. Súčet čísel tretieho stĺpca $6 + 12 + 3 + g = 34$. Z tohto viem, že číslo $g = 34 - 6 - 12 - 3 = 13$. Číslo $h$ bude číslo, ktoré nie je v prvom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 3, 4, 12, 14 a 15, pretože s číslami 12 a 15 je v druhom štvorci v rovnakej uhlopriečke, s číslami 4 a 14 je v rovnakom stĺpci a s číslom 3 je v rovnakom riadku. Po správnom vyškrtaní čísel mi zostane číslo 5. Súčet čísel v druhom stĺpci $4 + 14 + 5 + i = 34$. Z tohto viem, že číslo $i = 34 - 4 - 14 - 5 = 11$. Súčet čísel druhej uhlopriečky $5 + 12 + 15 + j = 34$. Z tohto viem, že číslo $j = 34 - 5 - 12 - 15 = 2$. V tabuľke 5 je zaznačené, čo sme doposiaľ zistili.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6 | 15 |
| | 14 | 12 | |
| | 5 | 3 | |
| 2 | 11 | 13 | 8 |

Tabuľka 5:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6 | 15 |
| k | 14 | 12 | m |
| l | 5 | 3 | n |
| 2 | 11 | 13 | 8 |

Tabuľka 6:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6 | 15 |
| 7 | 14 | 12 | 1 |
| 16 | 5 | 3 | 10 |
| 2 | 11 | 13 | 8 |

Tabuľka 7: Odpoveď

Opätovne si označíme ešte neznáme bunky, označenie je v tabuľke 5. Číslo $k$ bude číslo, ktoré nie je v prvom štvorci v ronvnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 2, 9, 12 a 14, pretože s číslami 12 a 14 je v druhom štvorci v rovnakom riadku a s číslami 2 a 9 je v rovnakom stĺpci. Po správnom vyškrtaní čísel mi zostane číslo 7. Súčet čísel prvého stĺpca $2 + 7 + 9 + l = 34$. Z tohto viem, že číslo $l = 34 - 2 - 7 - 9 = 16$. Číslo $m$ bude číslo, ktoré nie je v prvom štvorci v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečke ako čísla 7, 8, 12, 14 a 15, pretože s číslami 7, 12 a 14 je v druhom štvorci v rovnakom riadku a s číslami 8 a 15 je v rovnakom stĺpci. Po správnom vyškrtaní čísel mi zostane číslo 1. Súčet čísel $8 + 1 + 15 + n = 34$. Z tohto viem, že číslo $n = 34 - 8 - 1 - 15 = 10$.

**Odpoveď:** Jediný magický štvorec spĺňajúci podmienky zo zadania je vyobrazený v tabuľke 7.

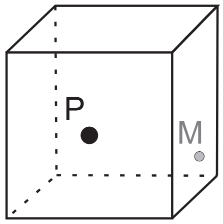
**Komentár:** V tomto príklade na vás nečakali žiadne zákerné chytáky. Stačilo pomaly postupovať podľa pravidiel, a nikde sa nepomýliť. To sa síce nepodarilo úplne každému, ale držali ste sa statočne. Bodovanie bolo nasledovné - jeden bod za správny výsledok, dva body za vyrátanie súčtu riadku magického štvorca (aj so zdôvodnením prečo) a zvyšných sedem za postup. Ak ste napríklad v postupe nevysvetlili umiestnenie niektorého čísla, tak ste hneď stratili pár bodov. Pri takomto príklade by sa patrilo na konci aj overiť, či výsledok spĺňa všetky podmienky zo zadania, pretože teoreticky úloha nemusela mať žiadne riešenie. A keďže ste pri rátaní nepoužili všetky podmienky čo musia platiť, tak by nejaká nemusela platiť. Za túto chybu sme tentokrát nestrhávali, ale pochvalu od nás dostáva Mária Reháková, pretože ona jediná svoje riešenie overila.

## Prémia (opravovali Laco, Jančo):

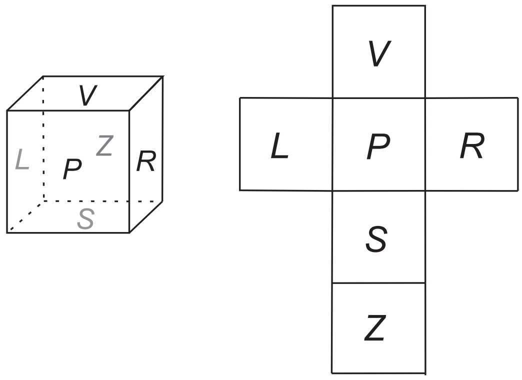
**Zadanie:** Pavúk sedí presne v strede prednej steny kocky, ktorá sa vznáša nad zemou, s hranou dlhou 10 cm. Rád by ulovil muchu, ktorá sedí na protiľahlej stene kocky (čiže na zadnej) tak, že jej vzdialenosť od spodnej aj pravej steny je 1 cm. Popíšte presne, kadiaľ má pavúk liezť, aby ju čo najrýchlejšie chytil, keď vie loziť len po vonkajších stenách kocky.

**Riešenie:** Pri takejto úlohe je kľúčom k úspechu názorne si situáciu nakresliť na papier, alebo ešte lepšie: vyrobiť si kocku ako pomôcku. My sme si nakreslili kocku so zakreslenou pozíciou pavúka $P$ a muchy $M$ na papier (obrázok 10, mucha je na zadnej stene kocky). Pavúk sa môže vydať viacerými smermi, a keďže je v strede prednej steny, má to rovnako ďaleko ku každej zo susedných stien. Je preňho ale najvýhodnejšie na muchu zaútočiť zo spodnej, alebo z pravej steny, pretože odtiaľ to má najbližšie. Skúsme ho poslať cez spodnú stenu kocky.

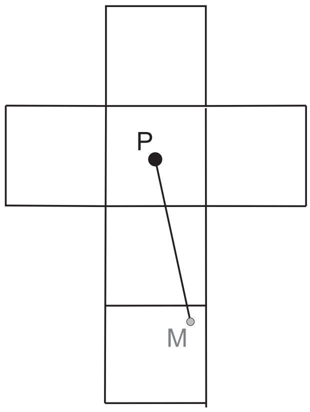
Pavúk dokáže liezť po stenách a prechádzať na susedné steny. Pokiaľ tieto pravidlá zachováme, môžeme si povrch kocky rozprestrieť a predstaviť si ho v rovine. Nakreslíme si tak plášť kocky (pre plášť kocky platí, že z neho vieme ohnutím pozdĺž vyznačených hrán poskladať kocku). Jeden zo spôsobov, ako ho nakresliť, je na obrázku 11. Všimnite si, že sme si plášť nakreslili tak, aby na ňom boli predná, spodná a zadná stena prepojené (to preto, aby sme si vedeli zakresliť cestu pavúka práve cez tieto steny). Na takomto plášti teraz môžeme hľadať najkratšiu cestu od pavúka k muche.



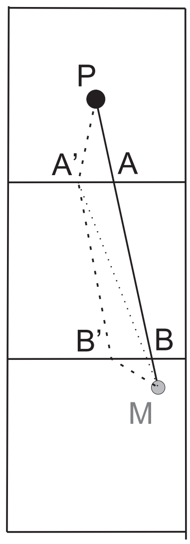

Obrázok 10: Pavúk a mucha




Obrázok 11: Rozprestrenie na plášť




Obrázok 12: Cesta pavúka




Obrázok 13: Odôvodnenie

Najkratšiu cestu medzi dvoma bodmi $P$, $M$ v rovine predstavuje úsečka $PM$. Plášť kocky máme zvolený tak, že úsečka $PM$ leží na stenách kocky (obrázok 12), čiže cesta po tejto úsečke sa dá zakresliť a aj na priestorovej (poskladanej) kocke. Pavúk teda pôjde najpriamejšou cestou k muche. A skutočne je to najkratšia možná cesta.

Pre starších riešiteľov: Na overenie nám stačí takáto úvaha: Zvoľme si nejakú inú cestu pavúka. Cez body $A'$ a $B'$ na hranách kocky, rôzne od bodov $A$ a $B$ (obrázok 13). Vieme, že súčet dĺžok dvoch strán v trojuholníku je väčší než dĺžka tretej strany (tzv. trojuholníková nerovnosť):

$$|PA'| + |A'M| > |PM|$$

$$|A'B'| + |B'M| > |A'M|$$

Ak v prvej nerovnosti nahradíme $|A'M|$ väčšou dĺžkou ($|A'B'| + |B'M|$), znamienko nerovnosti sa nezmení. Dostaneme:

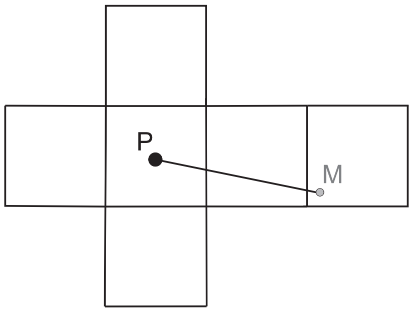
$$|PA'| + |A'B'| + |B'M| > |PM|$$

a to nám svedčí o tom, že cez ľubovoľné body $A'$ a $B'$ vedie dlhšia cesta než nájdená cesta po úsečke $PM$.

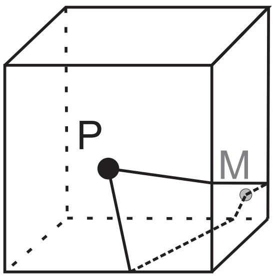
Ale nie je to jediné riešenie! Ako sme spomínali, rovnako výhodne ako cez spodnú stenou sa môže pavúk vydať aj cez pravú stenu. Stačí si nakresliť plášť kocky, ako na obrázku 14 a opäť spojiť body $P$ a $M$ úsečkou. Dostávame rovnako dobré riešenie.

Obidve možné cesty sú zakreslené na priestorovej kocke na obrázku 15. Keďže od hornej a ľavej steny je mucha viac vzdialená, najkratšie cesty sú len tieto dve, cez pravú a dolnú stenu.

**Komentár:** Samozrejme, na presný popis cesty pavúka by sme potrebovali vypočítať umiestnenie bodov $A$ a $B$, cez ktoré má pavúk ísť (ich vzdialenosť od vrcholov kocky). Ale tieto výpočty, rovnako ako výpočet dĺžky cesty pavúka sú už ďaleko nad rámec úlohy a popasovať sa s nimi môžete až s učivom z deviateho ročníka. Namiesto toho sme od vás chceli prepísané zadanie (1 bod), úvahu nad nájdením najvýhodnejšej cesty (ideálne pomocou plášťa kocky) a jej zakreslenie (max. 3 body), uvedomenie si aj druhého riešenia (1 bod) a napokon to celé pozliepať ešte logickým komentárom (1 bod), pretože len samotné fakty nestačia na plnohodnotné riešenie (a ako vidíte, dá sa toho popísať celkom dosť). Skúste si z tohoto príkladu zapamätať, ako je dobré rozložiť kocku na plášť, pri takomto „kockovom“ type úlohy. A že sa oplatí spýtať sa samého seba: Je ešte nejaké




Obrázok 14: Druhá cesta




Obrázok 15: Výsledok: obidve cesty

riešenie? Tým, čo na to prišli, gratulujeme. A špeciálne ďakujeme tým, ktorí obohatili svoje riešenie o presné grafické a farebné obrázky, alebo nohatých pavúčikov.