RIEŠKY

10. ročník – zimná séria
2.kolo

matematický korešpondenčný seminár

Milé naše rieškarčatá, rieškarky a rieškari,

ďalšia séria je za nami. No, za Vami bola už dáku tú dobu, ale nás ešte čakalo opravovanie. Vlastne, mna ani nie. Áno, priznávam, nestíhala som vám opraviť žiadny z príkladov. Škoda. Ale veď ja sa niekedy neskôr polepším. A možno nie. ;)

Ale čo sa to udialo od minulého úvodu? No predsa, boli Matboje Riešok a Pikomatu. Temný čarodejník, alebo neskôr aj čarodejnica (konečne niečo, čo som nemusela až tak hrať... buhahaaa... :)), ktorí sa pokúšali ovládnuť Magickú radu. Laco si veru riadne natrénoval, čo všetko obnáša magický súboj. A my s ním, samozrejme. Po mnohých útrapách však šialenosť vyhrala, teda, šťastie... vlastne... dobro vyhralo nad zlom (aj-jaj, už zase to nevyšlo), a z temnoty sa stal plyšák. Ach, keby to aspoň bola mačka a nie myš

Dosť bolo minulosti. Radšej hľaďme vpred. Na Gamči nám vrcholí OH Pohľad, tešíme sa na Galaprogram, ktorý je na Mikuláša. Ale čo je zaujímavejšie, blížia sa Vianoce! To som len ja taký šialenec, že sa teším? Alebo je to bežný jav? Je to nákazlivé? Veď už aj vianočné trhy začali. Tak šup, šup medzi stánky s krásnymi vecami a rozvoniavajúcim jedlom. Nech aj vy máte už predvianočnú náladu.

Ale teraz už nečítajte len tento môj úvod. Pekne listujte ďalej... A majte sa krásne...

Vaša temná čarodejnica Allie

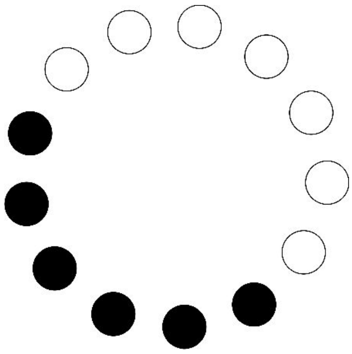
Vzorové riešenia druhého kola zimnej série 2007/2008

Príklad č.1 (opravovala Jankaa):

Šesť chlapcov a sedem dievčat bude stáť v kruhu. My budeme zisťovať, koľko dievčat drží za ruku chlapca. A chceme nájsť všetky možnosti. Nie však možnosti rozostavenia, ale počtu dievčat držiacich za ruku chlapca.

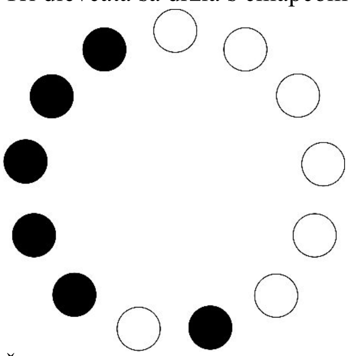
Na začiatku je asi najvhodnejšie spraviť takúto úvahu:
Dievčat je sedem. Takže určite nebude viac ako sedem dievčat držať chlapca za ruku. Keďže sa majú všetci držať za ruky v kruhu, minimálny počet dievčat, ktoré budú držať chlapca za ruku sú dve. (Oddelená skupinka dievčat a skupinka chlapcov, vytvorí dve spojenia chlapec - dievča.) Možné počty dievčat, ktoré držia za ruku chlapca, teda sú: 2, 3, 4, 5, 6 a 7. Stačí už len ukázať, že pre každú túto "predpokladanú" možnosť naozaj existuje rozostavenie detí.
Poďme si teda kresliť obrázky.

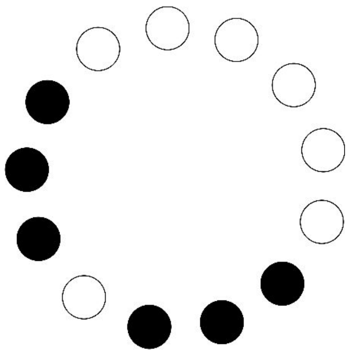
Dve dievčatá sa držia s chlapcom.
Túto možnosť sme si už opísali na začiatku, tak už si ju iba znázorníme:



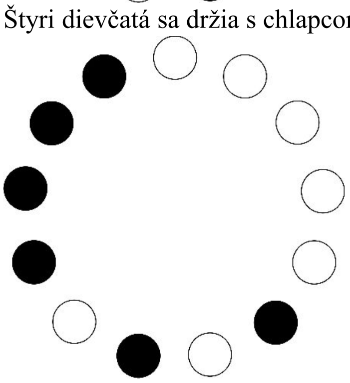
Ostatné možnosti už mohli mať viacero znázornení. Samozrejme akékoľvek z nich je správne. Vo vašich riešeniach sa objavili dva rozličné prístupy k hľadaniu možností a oba sa mi veľmi páčili. Jeden som nazvala posúvací, a ten druhý súmerný. Pri posúvacom ste vždy zo skupiny chlapcov oddelili jedného, a tým ste dosiahli novú držiacu sa dvojicu dievča - chlapec. Pri súmernom ste zase vždy hľadali nové rozdelenie. No pomáhali ste si súmernosťou rozostavenia (súmernosť tu znamená, že viete kruh rozdeliť na dva podobné polkruhy, s rovnakým rozmiestnením bodov). Ak ešte úplne nerozumiete, nevadí, všetko si ukážeme na obrázkoch:). Chlapci sú znázornení čiernymi bodkami (majú čierne čiapočky), dievčatá bielymi.

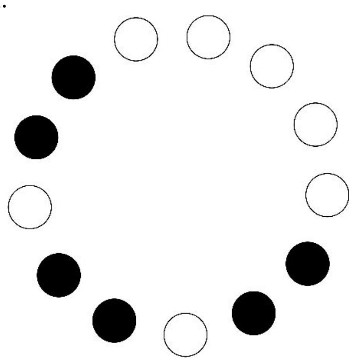
Tri dievčatá sa držia s chlapcom:



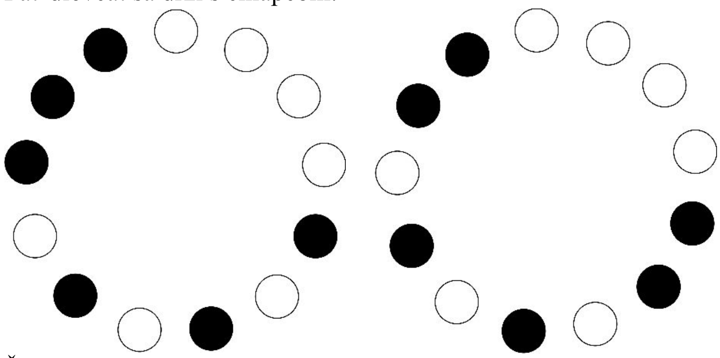


Štyri dievčatá sa držia s chlapcom:

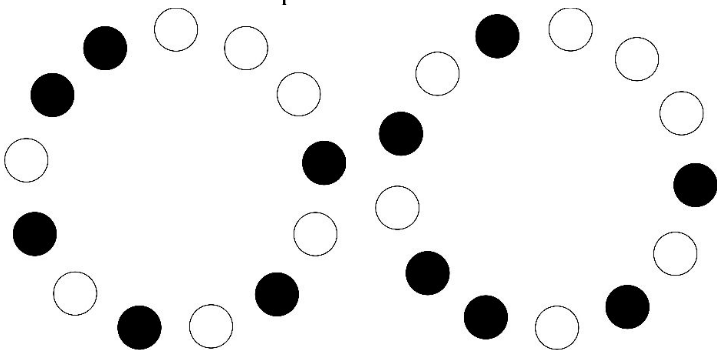




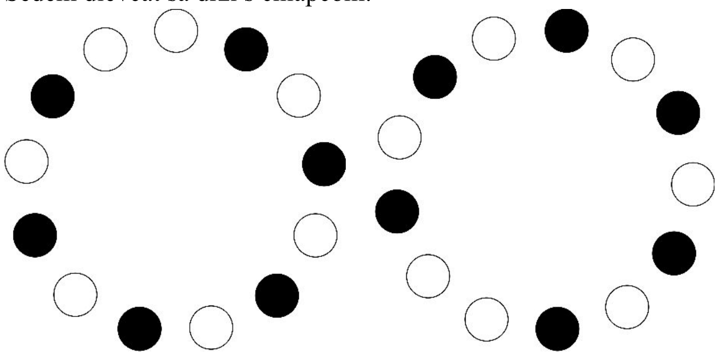
Päť dievčat sa drží s chlapcom:



Šesť dievčat sa drží s chlapcom:



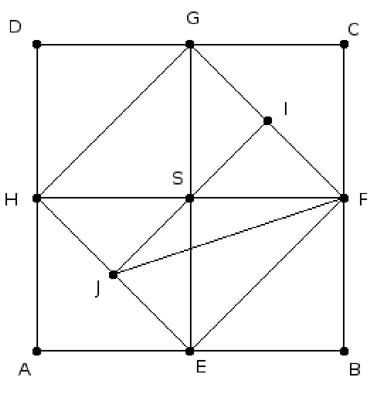
Sedem dievčat sa drží s chlapcom:



Odpoveď: Ako sme ukázali, s chlapcom sa môže držať za ruku 2, 3, 4, 5, 6 alebo 7 dievčat.
Komentár: *Riešili ste všetci dobre. Vyskytli sa vlastne len menšie chybičky. Nakoľko ani príklad nebol ťažký, zvádzalo vás to len nakresliť šesť obrázkov. Na to nabudúce pozor, napíšte odpoveď a aspoň vysvetlenie ako ste sa k tým obrázkom dopracovali. A bodovanie? Za také riešenie, ktorému nič nechýbalo 10 bodov. Keď vám chýbalo vysvetlenie, prečo skúšate kresliť možnosti len v intervale 2-7, dostali ste 9 bodov. Takisto, ak z riešenia nebolo vidieť odpoveď na otázku išiel 1 bod dole. A samozrejme za rôzne iné chyby som vám strhávala 1-3 body. Tak do budúcna sa zo svojich chýb poučte, a ja sa budem tešiť na nové riešenia.*

Príklad č.2 (opravovali Miška a Janka=)):

Spojme stredy strán štvorca *ABCD* úsečkami *EG* a *FH*. Ich priesečník označme *S*. Vznikli nám štyri menšie štvorce: *AESH*, *EBFS*, *FCGS* a *SGDH* a zároveň osem trojuholníkov *AEH*, *ESH*, *EBF*, *FSE*, atď. Všetky trojuholníky majú rovnaký obsah, keďže majú rovnaké všetky tri strany.



Veľký štvorec teda tvorí osem trojuholníkov s rovnakým obsahom ako *AEH*.
I a *J* sú stredy strán *FG* a *EH*, teda úsečka *IJ* delí štvorec *EFGH* na polovicu. Úsečka *JF* je uhlopriečka v obdĺžniku *EFIJ*, teda ho rozdeľuje na dva rovnaké trojuholníky. Rovnako vieme nájsť takéto trojuholníky v obdĺžniku *JIGH*. V menšom štvorci – *EFGH* sú teda štyri trojuholníky s rovnakým obsahom ako má trojuholník *IJF*.
Štvorec *EFGH* sa skladá zo 4 trojuholníkov s obsahom ako *AEH* ale taktiež ho vieme zložiť aj zo 4 trojuholníkov s obsahom *IJF* => $S_{AEH} = S_{IJF}$.
Zo zadania vieme, že pre obsah týchto trojuholníkov platí:

$$S_{AEH} + S_{IJF} = 16 \text{ cm}^2$$

a pred chvíľou sme si ukázali, že majú rovnaký obsah:

$S_{AEH} = S_{IJF}$

Z čoho vyplýva :

$2 * S_{AEH} = 16\ cm^2$

$S_{AEH} = 8\ cm^2$

V celom štvorci *ABCD* je osem štvorcov s obsahom rovnakým ako má trojuholník *AEH* (pozri vyššie), teda obsah štvorca je 8-krát 8 cm^2, čiže **64 cm²**.

Komentár: *Príklad ste vyriešili väčšinou dobre. Našli ste viacero možných postupov, hore je opísaný len jeden z nich. Body sme strhávali najmä za to, že ste nevysvetlili, prečo sú trojuholníky alebo ich obsahy rovnaké (2 body), nedostatočne ste vysvetlili, ako ste sa dostali k výslednému výpočtu (16 cm^2*4 alebo 8 cm^2*8) – 2 body, za výsledok ste mohli dostať 3 body, za to, že ste zistili, ktoré trojuholníky sú rovnaké ste dostali 2 body. Častá chyba, za ktorú sme strhávali body, bol zápis: AEH + IFJ = 16 cm^2, alebo jemu podobné. Nesčítavame totiž trojuholníky, ale obsahy trojuholníkov, resp. štvorcov, obdĺžnikov a pod.!*

Príklad č.3 (opravovali Tinka, Lubka a Tajná □):

Aby sa nám jednoduchšie čítal tento vzorák, pri dĺžkových premenných a hodnotách majme vždy na mysli metre, ale jednotku meter uvedieme vždy až na záver výpočtu.

A (okrem GAMČE):

Rozdeľme jednu stranu ihriska na dve časti rovnakej dĺžky, označme ich x. Teda táto strana ihriska je dlhá $2x$. Dĺžku druhej strany označme y. Potom obvod celého ihriska je:

$$O_{IHR} = 2.(2x + y) = 4x + 2y = 300 \quad (1)$$

Okrem toho zo zadania vieme, že 12-krát obehnúť celé ihrisko trvá rovnako dlho ako 20-krát obehnúť ihrisko polovičnej veľkosti (viď. vyšrafovanú časť, obvod označme O_{POLIHR}). Aby bol čas obiehania rovnaký pri rovnakej rýchlosti, musí byť aj dráha rovnaká. Čiže

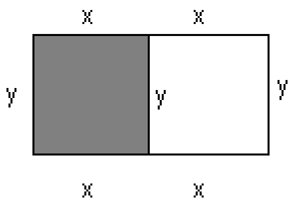
$$12.O_{IHR} = 20.O_{POLIHR}$$

Z toho dostaneme, že:

$$O_{POLIHR} = 12.300 / 20 = 180$$

Pridáme výpočet obvodu „polihriska" pomocou dĺžok x, y:

$$O_{POLIHR} = 2(x + y) = 2x + 2y = 180 \quad (2)$$



Ak sa dobre prizrieme rovniciam (1) a (2), nie je už ťažké dopátrať sa k dĺžkam strán ihriska. Riešiteľsky pekný bol nápad odčítať od seba O_{IHR} a O_{POLIHR}, preto si tu uvedieme tento postup (aj keď možností ako vyriešiť túto sústavu rovníc bolo samozrejme viac).

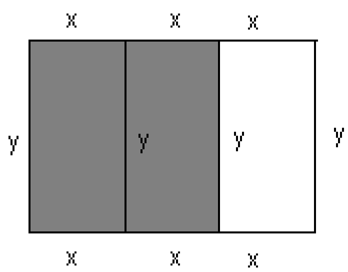
$$O_{IHR} - O_{POLIHR} = (4x + 2y) – (2x + 2y) = \mathbf{2x} = 300 – 180 = \mathbf{120}$$

Čiže $2x = 120$, a to je zároveň jedna zo strán ihriska. Druhú dopočítame dosadením $2x = 120$ do vzťahu o obvode obdĺžnika: $2.(120 + y) = 300$, čiže $y = 30$.

Rozmery ihriska teda sú 120 m a 30 m.

B (pre GAMČU):

Postup bude podobný ako pri úlohe 3A. Rozdeľme jednu stranu ihriska na tri časti rovnakej dĺžky, označme ich x. Potom má táto strana ihriska dĺžku $3x$. Dĺžku druhej strany označme y. Potom obvod celého ihriska je:



$$O_{IHR} = 2.\ (3x + y) = 6x + 2y = 150 \quad (1)$$

Okrem toho zo zadania vieme, že 12-krát obehnúť celé ihrisko trvá rovnako dlho ako 15-krát obehnúť ihrisko dvojtretinovej veľkosti (viď. vyšrafovanú časť). Aby bol čas obiehania rovnaký pri rovnakej rýchlosti, musí byť aj dráha rovnaká. Čiže:

$$12.O_{IHR} = 15.O_{2/3\ IHR}$$

Z toho dostaneme, že:

$$O_{2/3\ IHR} = 12.150/ 15 = 120$$

Pridáme výpočet obvodu dvoch tretín ihriska pomocou dĺžkok x, y:

$$O_{2/3\ IHR} = 2(2x + y) = 4x + 2y = 120 \quad (2)$$

Nie je už zložité dopátrať sa k dĺžkam strán ihriska z rovníc (1) a (2). Možností ako vyriešiť túto sústavu rovníc je viac, nám sa páčil nasledujúci jednoduchý nápad:

$$O_{IHR} - O_{2/3\ IHR} = (6x + 2y) – (4x + 2y) = \mathbf{2x} = 150 – 120 = \mathbf{30},$$

čiže x = **15**. Z toho už poľahky dopočítame prislúchajúcu stranu ihriska dĺžky $3x = 3.15 = 45$. Druhú stranu dostaneme dosadením do vzťahu pre obvod obdĺžnika: $2.(45 + y) = 150$, čiže $y = 30$. Rozmery ihriska teda sú 45 m a 30 m.
Ešte chceme vedieť, koľkokrát Emilio obehne tretinu ihriska pri rovnakom čase, za ktorý obehne 15-krát dvojtretinové ihrisko a 20-krát celé ihrisko. Vieme, že:

$$12.O_{IHR} = 15.O_{2/3\ IHR} = 1800$$

To sa logicky musí rovnať niektorému násobku obvodu tretiny ihriska:

$$n.O_{1/3\ IHR}. = 1800$$

$$O_{1/3\ IHR}. = 2(x + y) = 2.(15+30) = 90.$$

Potom $n.O_{1/3\ IHR}. = n.90 = 1800$, čiže $n = 20$. Emilio obehne tretinové ihrisko 20-krát za uvedený rovnaký čas.
Komentár: *Tento príklad bol dosť ľahký a to sa odrazilo aj na počte vašich bodov:) Takmer všetci, okrem pár výnimiek to mali správne vypočítané. Občas vám chýbal komentár, odkiaľ ste nabrali obvody 2/3 ihriska a 1/3 ihriska, tak za to sme strhli 1-2 body. V B-čku bola aj druhá otázka, na ktorú pár jedincov zabudlo, prípadne vypočítalo len obvod tretiny ihriska, ale počet obehnutí za ten čas zabudli, za to šli bodíky tiež dole :(.Kopa z vás však mala 10 bodov, snáď vám to pôjde tak aj naďalej :)*

Príklad č.4 (opravovali Laco, Gabika a Paťka):

Deti si označíme začiatočnými písmenami ich mien, teda M, L, T a R.
Z hádanky, ktorú dostala Catherine si všetky tvrdenia zapíšeme pomocou rovníc:

$T=R+2$ (1)
$M+L=T+R$ (2)
$M=2*L$ (3)

Vysvetlenie si zaslúži hlavne vytvorenie poslednej rovnice. Thomas mal pred rokom $T – 1$ rokov. Leonora mala pred rokom $L – 1$ rokov. A keďže Thomas mal pred rokom dvakrát toľko rokov ako Leonora pred rokom, musí 4. rovnica vyzerať takto:

$T-1=2*(L-1)$ (4)

Využijeme čo vieme z prvej rovnice o vzťahu medzi vekom Rolanda a Thomasa: ($R=T-2$) a z tretej rovnice o vzťahu medzi vekom Miguely a Leonory: ($M=2*L$). Tieto vzťahy dosadíme do rovnice (2) tak, aby sme dostali vzťah medzi L a T. Určite sa divíte, prečo nám práve toto pomôže. Dôvodom je rovnica (4). V nej sa takisto nachádza vzťah medzi L a T. Po dosadení do (2) dostaneme:

$2*L+L=T+T-2$

Túto rovnicu a rovnicu (4) upravíme tak, aby sme vedeli aký je Thomasov vek v závislosti od Leonorinho veku:

$3*L=2*T-2$
$3*L+2=2*T$
$\mathbf{T=(3*L+2):2}$

Z rovnice (4) dostaneme:

$\mathbf{T=2*(L-1)+1}$

Keďže Thomas má iba jeden vek, musí platiť, že $(3*L+2):2=2*(L-1)+1$**,** z čoho po úprave dostaneme:

$3*L+2=4*L-4+2 / -3*L + 2$
$\mathbf{4 = L}$

Toto je jediná možnosť, koľko rokov môže mať Leonora.
Z tohto vieme jednoznačným spôsobom dopočítať, koľko rokov majú ostatné deti.
Thomasov vek dostaneme po dosadení $L=4$ do ľubovoľného zo spomínaných dvoch vzťahov:

$\mathbf{T=2*(L-1)+1=7}$

Keďže už vieme, koľko rokov majú Thomas a Leonora, vieme jednoducho z rovnice (1) a (3) zistiť, koľko rokov majú zvyšné dve deti:

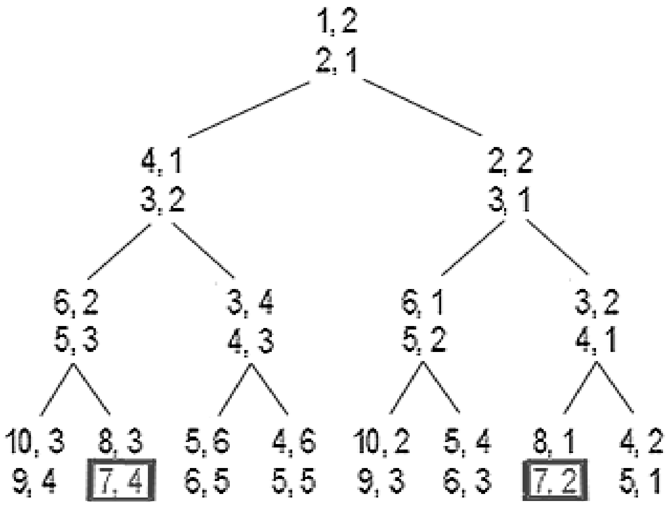
$\mathbf{R=T-2=5}$
$\mathbf{M=2*L=8}$

Čiže Roland má 5 rokov, Thomas 7, Leonor 4 a Miguela 8.
Komentár: *Tento príklad vám zväčša nerobil väčšie problémy, čo vidno aj na tom, že sme rozdali okolo 20-krát 10 bodov. Dosť bolo aj 9 a 8-bodových riešení so slabšími vysvetleniami v postupe, prípadne numerickými chybami. Okrem rovníc bol veľmi obľúbený aj postup: Čo ak L má 1 rok (ostatné dopočítame), čo ak L má 2 roky (ostatné dopočítame), atď. Tu bolo najčastejšou chybou to, že mnohí skončili, keď našli riešenie a neodôvodnili, prečo je jediné. Za toto sme strhávali 3 body. Skúšanie možností bol v tomto prípade postup rovnako dobrý, ako riešenie pomocou rovníc. Ale dávajte si pozor na niektoré nástrahy tohto postupu. Tá najväčšia je: Treba vyskúšať všetky možnosti (pokiaľ nie je v zadaní, že stačí jediné riešenie), alebo zdôvodniť, prečo ich nemá cenu skúšať. V našom prípade bola aj iná nástraha: V zadaní sme nespomenuli, či vek detí môže byť aj desatinné číslo. Čo ak môže? Potom by nestačilo skúšať len čísla 1, 2, 3, ... A ďalšia nástraha: Kde prestať skúšanie? Tu ste ale uplatnili vašu schopnosť logicky myslieť :) a povedali ste, že do 18, veď sú to ešte deti. Áno,*

presne tak :) Ale pozor na prípadné chytáky, alebo čudne zadané príklady, v ktorých by vám vyšiel napr. vek dieťaťa 47 ;) Je dobré spomenúť aj také riešenie- nikdy neviete, čo tým autori príkladu mohli myslieť ;).
Ešte sme vás tu ani nepochválili, tak vás na záver všetkých chválime :).

Príklad č.5 (opravovali Ľubka, Emi a Sasho):

Na začiatok celého nášho vzorového riešenia by sme sa vám chceli ospravedlniť za nejasnosť zadania. Nebolo v ňom celkom jasne napísané, či sa lasičky rozmnožujú už v prvý deň alebo až ten ďalší. Preto sme uznávali obidve riešenia.



Ale späť k postupu. Najprv si chceme vypočítať koľko dní trvalo, kým sa počet lasičiek vyšplhal na sedem. Treba si uvedomiť, že od počiatočného stavu sa mohol počet lasičiek vyvíjať rôzne, záleží od toho, v ktorej nore sa v ktoré dni lasičky premnožili. Preto si spravíme takýto krásny strom, v ktorom si vypíšeme všetky možnosti, ako sa mohli lasičky postupne množiť (v strome symbolizujú zmenu stavu tzv. vetvy: ľavá vetva v tomto prípade znamená množenie lasičiek v ľavej nore, pravá vetva v pravej nore) A hľadáme samozrejme možnosť, pri ktorej bude počet dní, za ktorý sa rozmnožili, čo najmenší.

Pozn.: Zvolili sme si, že prvýkrát sa jedna lasička „premnoží“ v pravej nore (a vzniknutá hneď prebehne do ľavej). Uvedomte si, že ak by to bolo opačne (teda stav 1,2), iba by sa vymenilo poradie čísel v strome a ľavé a pravé vetvy medzi sebou. Samotné čísla by však ostali rovnaké.

Z nášho stromu nádherne vidno, že v obidvoch prípadoch vychádza, že najmenší počet dní, po ktorom sa objaví v jednej z nôr 7 lasičiek je štyri (päť, ak ste počítali, že lasičky sa množia po prvý krát až druhý deň). Tento počet si zapamätáme, lenže ešte k nemu musíme dopočítať, koľko najmenej trvá, kým počet lasičiek v jednej nore prekročí hranicu 100. Chceme, aby nám to trvalo čo najkratšie, teda budeme musieť zdvojnásobovať noru s väčším počtom lasičiek. A to preto, lebo zdvojnásobením väčšieho počtu dostaneme viac ako tou istou operáciou s menším počtom. V našom prípade už zo zadania, ale aj z nášho stromu, vieme, že po štvrtom (piatom) dni máme v plnšej nore 7 lasičiek. Takže si teraz dopočítame koľko dní ešte bude trvať, kým ich bude dosť. Samozrejme, nesmieme zabudnúť odpočítavať po každom množení jednu lasičku, ktorá prebehla do druhej nory.

7 . 2 = 14	14 – 1 = 13	*5. deň*
13 . 2 = 26	*26 – 1 = 25*	*6. deň*
25 . 2 = 50	*50 – 1 = 49*	*7. deň*
49 . 2 = 98	*98 – 1 = 97*	*8. deň*
98 . 2 = 194	*194 – 1 = 193*	*9. deň*

Ako vidíte, vyšlo nám to na deviaty deň a ak ste počítali so štartom rozmnožovania až druhý deň, vyšlo vám prekročenie počtu 100 na desiaty deň. Keďže sme už spomínali, že uznávame obidve riešenia, tak správnym výsledkom bolo, že **hyena napadla lasičky buď v deviaty alebo desiaty deň.**

Pozn.: Množením lasičiek mohla sedmička vyjsť aj na inom mieste v strome (7,1 napr.). Ale určite by vznikla nižšie, teda neskôr ako uvedené možnosti 7,4 a 7,2, takže by sa 100 lasičiek namnožilo neskôr ako v našom prípade.

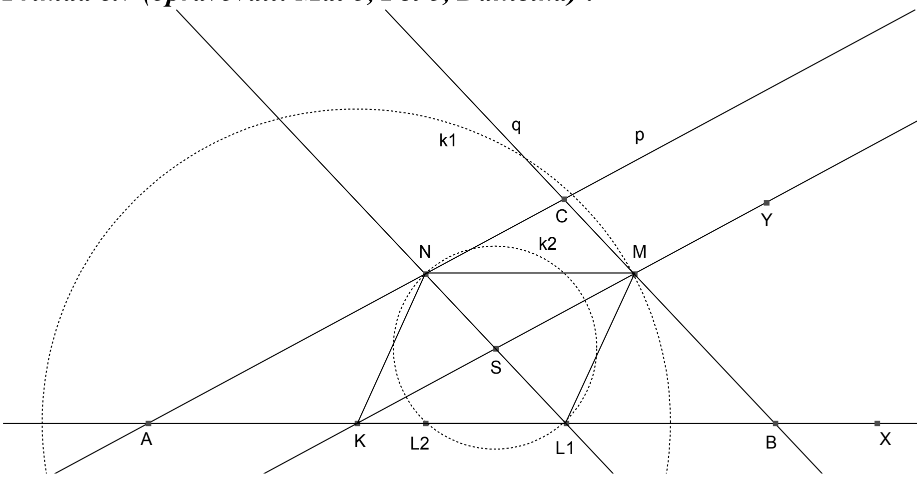
Komentár: *Celkovo ste príklad riešili veľmi pekne, len sa občas vyskytli nejaké nezrovnalosti v postupe. Najmä ste zabúdali vysvetliť, prečo vždy, od počtu lasičiek 7 v plnšej nore, násobíte práve túto plnšiu noru. Za to sme vám strhli po jednom bodíku. Ak ste nevysvetlili poriadne ako ste prišli k počtu dní, za ktoré sa ocitlo v plnšej nore sedem lasičiek, išli vám dole ďalšie 2 body. Za výsledok len v tvare tabuľky sme vám dali po tri body, s náznakom postupu štyri. Ale hlavne sa nabudúce snažte, najmä pri takýchto príkladoch, poriadne vysvetliť, ako ste rozmýšľali pri riešení. A všetci vám želáme, aby ste si užili sniežik a supermarkety preplnené vianočnými haraburdami:). A dúfame, že vám v tejto ukrutnej zime náš príklad aspoň nachvíľu pripomenul africké savany a Levieho kráľa:).*

Príklad č.6 (opravovali Emil, Monča, Kozzy):

V prvom rade je dobré si uvedomiť koľko týždňov a dní má jeden rok. Ak je rok nepriestupný, tak má 365:7=52 týždňov a jeden deň (zv.1). Ak je rok priestupný, má o deň viac, takže má 52 týždňov a dva dni. Po jednom nepriestupnom roku sa teda posledný deň posunie o jeden deň v týždni. Napríklad rok 2000 končí nedeľou a keďže rok 2001 je nepriestupný, tak tento bude končiť pondelkom (prvý deň tohto roka bude pondelok, prejde celých 52 týždňov a nasledujúci, čiže posledný

deň roku bude opäť pondelok). Rok 2002 je tiež nepriestupný a tak bude končiť utorkom. Po ubehnutí priestupného roku sa posledný deň posunie o dva dni v týždni oproti predchádzajúcemu roku.
Keďže je priestupný rok každý štvrtý, tak za storočie ich je 100:4 = 25. Toto však platí iba pre storočie, ktorého posledný rok (teda ten, ktorého zápis končí nulami) je deliteľný štyristo. V opačnom prípade posledný rok storočia nebude priestupný, pretože rok deliteľný 100, ktorý nie je deliteľný 400, priestupný nie je. Ak teda posledný rok storočia priestupný nie je, tak priestupných rokov za takéto storočie bude iba 25 – 1 = 24. Preto ak je posledný rok storočia nepriestupný, posledný deň sa posunie o 100 + 24 = 124 dní v týždni (100-krát sa posunie o jeden deň, 24-krát ešte o jeden navyše) oproti poslednému dňu predchádzajúceho storočia. 124 dní, ale môžem napísať aj ako 124:7 = 17 týždňov a 5 dní. To znamená, že posledný deň sa posunie o 5 dní v týždni dopredu. Keďže sa rok 2000 končí nedeľou, tak rok 2100 sa bude končiť nedeľa + 5dní = piatkom. Podobne ani rok 2200 nie je priestupný a tak tento bude končiť piatok + 5dní = stredou. Rok 2300 končí streda + 5dní = pondelkom. Ak je posledný rok storočia deliteľný 400, tak je priestupný, a teda za toto storočie sa posledný deň roku posunie o 100 + 25 = 125 dní v týždni. No a 125 dní je 125:7= 17 týždňov a 6 dní. Pre nás je zaujímavých práve tých 6 dní. No a keďže 6 dní po pondelku (posledný deň roku 2300) je nedeľa, tak posledný deň roka 2400 je práve nedeľa.
No a ďalej sa to bude opakovať. Zase prídu tri storočia s nepriestupným posledným rokom a ich posledné dni sa posunú rovnako o päť dní v týždni dopredu (budú to piatok, streda a pondelok). Potom zase príde storočie s priestupným posledným rokom, posledný deň sa posunie o ďalších šesť dní v týždni dopredu a opäť to bude nedeľa. Za takýto štvorstoročný cyklus sa teda vždy vystriedajú na mieste posledného dňa v storočí dni piatok, streda, pondelok a nedeľa. Inými dňami teda storočie končiť nemôže.
Riešenie: Žiadne storočie nebude končiť dňami utorok, štvrtok a sobota.
Komentár: *Na tomto príklade bolo najťažšie asi pochopiť zadanie. Viacerí z vás počítali s tým, že priestupný je každý štvrtý rok bez výnimiek. Našli sa dokonca aj takí, ktorý si mysleli, že žiadny rok nie je priestupný. Keďže týmto bol príklad dosť zjednodušený, dostali ste 3 až 5 bodov. Za menšie chyby a nedostatky v postupe sme strhli bod, prípadne dva.*

Príklad č.7 (opravovali: Maťo, Peťo, Danielka) :



Postup:

1. Narysujeme priamku *KX*.
2. Narysujeme priamku *KY*, pričom priamky *KY* a *KX* zvierajú uhol *MKL*, ktorý je daný v zadaní.
3. Narysujeme kružnicu k_1 so stredom v bode *K* a polomerom *KM*, ktorý poznáme.
4. Bod *M* leží v priesečníku kružnice k_1 a priamky *KY*.
5. Keďže uhlopriečky v kosodĺžniku sa rozpoľujú, môžeme vyznačiť bod *S*, stred úsečky *KM*.
6. Narysujeme kružnicu k_2 s polomerom o veľkosti ½ *LN* (veľkosť úsečky *LN* je daná v zadaní).
7. Dva priesečníky kružnice k_2 s priamkou *KX* označím ako L_1 a L_2.

Mnohí ste tu urobili chybu, že ste zabudli na druhý priesečník L_2 !!!
Budeme ďalej rysovať s použitím bodu L_1, pričom ho odteraz budeme označovať iba ako *L*.
Ak by sme ďalej rysovali s použitím bodu L_2, použili by sme rovnaký postup, ako teraz ukážeme pre L_1 a vznikol by nám podobný trojuholník ale veľmi sploštený.

8. Narysujeme si polpriamku *LS*.
9. Bod *N* leží v priesečníku kružnice k_2 a polpriamky *LS*.

Trojuholníky *ABC* a *KBM* sú podobné, pretože majú dva uhly rovnaké
(uhol *KBM* = uhlu *ABC* a zo zadania vieme, že uhol *MKB* = uhlu *CAB*). Preto sú úsečky *AC* a *KM* rovnobežné.

10. Narysujeme rovnobežku *p* k úsečke *KM*, prechádzajúcu bodom *N*.
11. Bod *A* leží v priesečníku priamok *p* a *KX*.

Trojuholníky *ABC* a *ALN* sú podobné, pretože majú dva uhly rovnaké:
uhol *BAC* = uhlu *LAN* a uhol *ANL* = uhlu *ACB* (pretože *ANL* je striedavý uhol k uhlu *NSM,* keďže priamka *p* a priamka *KM* sú rovnobežné. Rovnosť uhlov *NSM* a *ACB* vieme zo zadania). Z toho vyplýva, že úsečky *LN* a *BC* sú rovnobežné.

12. Narysujeme rovnobežku *q* k úsečke *LN*, prechádzajúcu bodom *M*.
13. Bod *B* leží v priesečníku priamok *q* a *KX*.
14. Bod *C* leží v priesečníku priamok *p* a *q*.
15. Spojíme body *A, B, C* => trojuholník *ABC*.

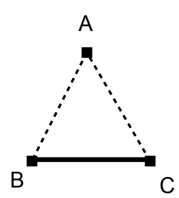
Komentár: *Príklad ste riešili väčšinou dobre. Občas ste si mysleli ,že máte daný uhol MSN, ale on nebol daný, len ste vedeli, že je rovnako veľký ako uhol ACB. Ďalej sme strhávali body, ak ste nenapísali ako ste zostrojili lichobežník KLMN (len ste napísali, že z toho čo máte dané ho viete zostrojiť). Chceli sme od vás tiež počuť, že uhlopriečky v kosodĺžniku sa rozpoľujú a preto môžete KLMN zostrojiť takým spôsobom.*

Príklad č.8 (opravovali Halucinka, Palo, Natali):
A (okrem GAMČE):

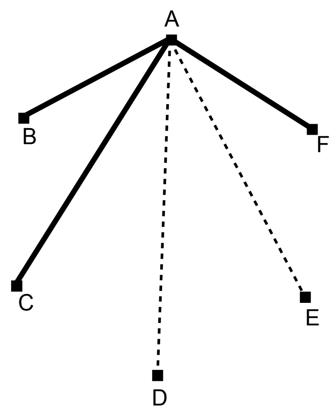
Ukážeme si, ako sa dá postupovať pri hľadaní Leonarda. Prídeme za osobou A, ktorá je na plese a spýtame sa jej, či pozná osobu B. Keď odpovie „Áno“, tak vieme, že osoba A môže byť Leonardo. Ďalej určite vieme, že osoba B nemôže byť Leonardo, pretože ju niekto pozná a Leonarda nikto nepozná. Ak odpovie „Nie“, budeme vedieť, že osoba A nemôže byť Leonardo, lebo nepozná každého zúčastneného na plese. No osoba B stále môže byť Leonardo. To znamená, že osoba A a osoba B tvoria dvojicu ľudí, z ktorých určite práve jeden nemôže byť Leonardo.
Na plese máme 20 ľudí, ktorých si vieme rozdeliť do desiatich dvojíc. Z každej z týchto dvojíc vieme vylúčiť jedného človeka (tak ako sme popísali vyššie), ktorý určite nie je Leonardo. Na to budeme potrebovať 10 otázok. Čiže nám zostane 10 ľudí, z ktorých jeden je Leonardo. Týchto si vieme rozdeliť na 5 dvojíc, z ktorých znova vieme piatimi otázkami vylúčiť 5 ľudí, ktorí nemôžu byť Leonardo. Zatiaľ sme použili spolu 15 otázok. Zostalo nám 5 osôb, o ktorých ešte nevieme povedať, či to určite je alebo nie je Leonardo. Zo štyroch z nich si vieme vytvoriť dve dvojice a dvomi otázkami vylúčime z každej dvojice jednu osobu, teda dokopy dvoch ľudí. Zatiaľ sme sa pýtali 17 otázok a zostali nám traja ľudia, ktorí môžu a nemusia byť Leonardo. Z týchto troch ľudí si vytvoríme dvojicu a jednou otázkou vylúčime jedného človeka z tejto dvojice. Už nám zostali len dvaja ľudia, o ktorých nevieme, či to je Leonardo alebo nie. Poslednou otázkou vylúčime jedného z nich. Teda už vieme, kto je Leonardo a použili sme 19 otázok.
Odpoveď: Estéban dokáže nájsť Leonarda na menej ako 20 otázok a to práve na 19 otázok.
Komentár: *Väčšia z vás to zvládla perfektne, rozdávali sme 10b jedna radosť. Body sme strhávali za to, keď ste nemysleli na všetky prípady ako sa ľudia na plese môžu poznať. Takisto nebolo správne predpokladať, že sa nikto na plese nepozná a len Leonardo pozná všetkých a podobne. Avšak myslím, že ste s týmto príkladom nemali problém, čo nás veľmi teší.*

B (pre GAMČU):

Cesty, ktoré existujú medzi nejakými dvoma domčekmi si označíme „plnou“ úsečkou a cesty, ktoré neexistujú medzi dvoma domčekmi si označíme čiarkovanou úsečkou. Takže na názornom obrázku medzi domčekmi B a C vedie cesta, ale medzi domčekmi A a C ani medzi A a B cesta nevedie.



To znamená, že medzi všetkými šiestimi domčekmi bude spolu 15 úsečiek (existujúcich a neexistujúcich ciest je spolu 15).
Vezmime si bod *A*. Z neho vedie 5 úsečiek a to do bodov *B*, *C*, *D*, *E* a *F*. Z toho vždy budú aspoň tri úsečky čiarkované alebo aspoň tri úsečky „plné“. Nemôže nastať situácia, že čiarkovaných úsečiek je menej ako tri a aj „plných“ úsečiek je menej ako tri. To by boli maximálne 4 cesty a my predsa máme bod *A* spojený s každým zo zvyšných piatich bodov.



Ak z bodu *A* ide 3 alebo viac „plných“ úsečiek, vyberiem si práve 3 z nich a všimnem si body, kam vedú. Keby sme ľubovoľné dva z tých troch bodov spojili „plnou“ úsečkou, vytvoríme „plný“ trojuholník. Teda chlapček by mal pravdu.
Ak však žiadnu dvojicu z týchto troch bodov nespojíme „plnou úsečkou“, musíme ich spojiť čiarkovanou úsečkou, vytvoríme tak čiarkovaný trojuholník a teda má pravdu dievčatko. V takýchto prípadoch má vždy aspoň jedno dieťa pravdu.
Rovnako to platí ak z bodu A ide 3 alebo viac „čiarkovaných“ úsečiek. Vyberieme tri z nich a už nemôžeme žiadne dva z týchto troch bodov spojiť „čiarkovanou“ úsečkou,

inak bude mať dievčatko pravdu. Ak však všetky dvojice vzniknuté z tých troch bodov spojíme „plnou“ čiarou, má pravdu chlapec.

Ukážeme si to na obrázku na konkrétnom príklade. Máme situáciu s tromi existujúcimi cestami - „plné“ úsečky (*AB*, *AC*, *AF*) . Ak by sme viedli cestu medzi domčekmi *B* a *C*, medzi domčekmi *B* a *F* alebo medzi *C* a *F*, mal by chlapček pravdu, lebo by vznikol trojuholník z existujúcich ciest („plných“ úsečiek). Ak však ani jedna z týchto ciest nebude „plná“, má pravdu dievčatko.
Teda sme ukázali, že vždy má pravdu dievčatko alebo chlapček alebo obaja.
Komentár: *Viac-menej ste tento príklad zvládli: Body sme strhávali za nedostatočné vysvetlenie alebo za zabudnutie nejakých možností vo vašom riešení. Avšak bolo pár veľmi pekných riešení, čo nás veľmi teší ☺. Tak vám držíme palce ☺*

Príklad č.9 (opravovali etome a dave):

Chceme dopraviť 3000 rožkov z mesta A do mesta D.
Najskôr sa zamyslime: Čím dlhšie bude pekár cestovať, tým viac rožkov zje. (Musíme myslieť aj na rožky, ktoré zje pri spätnej ceste pre nový náklad rožkov!) Vieme si predstaviť, že by si pekár naložil svoju dodávku doplna, 1000 rožkami, a odhodlane sa vydal na cestu, došiel by však len do polovice, kde by sa musel otočiť, aby mu ostali rožky na cestu späť... Takýmto spôsobom by pekár mohol zjesť aj všetky rožky, prešiel by 3000km a nič by do mesta D nedoniesol. Je teda jasné, že treba vymyslieť cestu tak, aby dokopy pekár cestoval menej ako 3000km.
Keďže naraz to nepôjde, najlepšie bude, keď si pekár stanoví skladiská na ceste, kde bude rožky uskladňovať, zatiaľ čo sa nevráti pre zvyšné. Ako náhle už prevezie všetky rožky na stanovisko, pokračuje ďalej v ceste. Otázka znie, či si vhodným stanovením skladísk môže ukrátiť z cesty? Áno, môže.
V meste A je 3000 rožkov, teda kvôli nosnosti vozu ich môže odniesť na prvé stanovisko najmenej na 3-krát (teda prvý kus cesty musí prejsť viackrát: tam, späť, tam späť, tam – až 5-krát) V ďalších úsekoch cesty však môžeme počet „obracačiek“ už zmenšiť, čím si cestu výrazne skrátime.
Treba teda nájsť také miesto B, odkiaľ by sme už rožky vedeli preniesť na dvakrát. Toto miesto by tiež malo byť čo najmenej vzdialené od mesta A, aby bol prvý úsek s 5 obrátkami čo najkratší (pre spresnenie: zobrať namiesto bodu B vzdialenejší bod B_1 nie je výhodné, lebo by sme vzdialenosť BB_1 museli prejsť viackrát). A keďže chceme čo najmenšiu vzdialenosť, aj počet rožkov, ktorý zje za prvý úsek bude minimálny možný, teda presne 1000, aby mohol pokračovať s 2000 rožkami ďalej.
Podobne, ak z toho miesta dostaneme na 2-krát rožky v čo najväčšom počte na miesto C (čo najbližšie k B), odkiaľ sa dajú preniesť naraz, tak z toho miesta ich už priamo dovezieme do mesta D. Bude to teda najkratšia cesta, najviac „šetriaca“ rožky.

Takže, z mesta A do bodu B absolvujeme trasu AB 5-krát (Do B,späť$_1$,B,späť$_2$,B)
a povedali sme si že z bodu B sa chceme dopraviť na 2-krát, čiže tam chceme mať už len 2000 rožkov. Na piatich cestách sme teda zjedli 1000 rožkov. *1000/5=200* rožkov na jednu cestu, čiže B je vo vzdialenosti 200km.

Teraz sa potrebujeme dostať do bodu C, späť a do bodu C. To je 3-krát trasa BC a pekár opäť zje 1000 rožkov- aby sa z miesta kam sa dostane mohol presunúť do cieľa na jeden krát. 1000/3 = 333,3. C je vo vzdialenosti 333 km od B. (ak by bolo 334 tak zje o 3 rožky viac, bude síce ďalej, ale rovnako ako to bolo v prípade bodu B_1, nebolo by to výhodné) V skutočnosti však po prejdení trasy 3-krát zje iba 999 rožkov, čiže v bode C ich nebude mať 1000 ale o ten jeden rožok, ktorý nezjedol, viac, čiže 1001.
Teraz má 1001 rožkov, naložiť však môže len 1000. Môže si však dovoliť luxusnú fintu: podľa zadania má **pred** každým kilometrom zjesť jeden rožok. Takže môže jeden zjesť v bode C, zabezpečiť si tak ďalší kilometer, a zvyšných 1000 naloží.
1000km-533km=467km a *1001-467=534* rožkov dovezie do mesta D.

Pozn.: Prenášať rožky sa dá viacerými spôsobmi. Jedným spôsobom je naložiť čo najviac, prejsť tam, vyložiť čo najviac (tak aby zostalo na cestu späť), a ísť späť. Ale pekár nemusí ísť rovno do dvojstého kilometra. Môže ísť hocikam pred ten dvojstý kilometer a preniesť tam čo najviac. Aj túto trasu by absolvoval 5-krát a keďže je menšia ako 200km, ostalo by mu stále viac než 2000 rožkov. A túto metódu môže aplikovať aj ďalej, až do bodu B. Pokojne si teda môže celý náklad posúvať aj po jednom kilometri, výsledok bude rovnaký. Na úseku medzi bodmi B a C je situácia rovnaká, iba trasa sa absolvuje 3-krát.

Rovnaký výsledok nastane aj v prípade, že by si pekár rozdelil náklad na časti a pre každú osobitne si vybral inú postupnosť stanovísk- princíp je ten istý.
Dalo by sa ešte ukázať, že ostatné výmysly pekára, ako napr. nenaplnenie celej dodávky alebo vyhodenie nákladu cestou, nevedú k úspechu, pretože mu zbytočne predĺžia cestu. Možností je veľa, ale najlepší výsledok dosiahneme práve uvedeným postupom.
***Komentár:** Žiaľ nikto z vás nedostal 10 bodov, aj keď boli aj veľmi pekné postupy. Zabúdali ste však na ten 1 rožok, ktorý nezjedol cestou do C. Iní sa väčšinou dopracovali k nesprávnym výsledkom a preto sme body prideľovali podľa správností postupu. Niektorí z vás si neuvedomili že rožky môžu aj vykladať počas cesty alebo nemysleli na potreby pekára na spiatočnej ceste – za takéto riešenie ste zväčša dostali 2b. Vždy je dôležité vysvetliť prečo váš výsledok je správny (v tomto príklade: prečo je to, čo preniesol, najviac čo mohol?) a na toto veľa z vás tiež nemyslelo.*

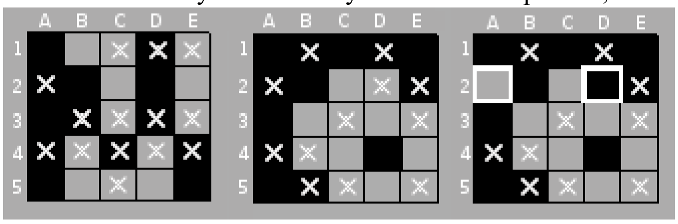
Prémia (opravovali Miško M. a Niwka):

Preklad(rumunčina):

Počas ťahu sa dajú navzájom vymeniť buď dve políčka v jednom riadku, alebo dve políčka v jednom stĺpci. Koľko najmenej ťahov je potrebných na to, aby vznikol z ľavého obrazca ten napravo (šachovnica)?

Riešenie:

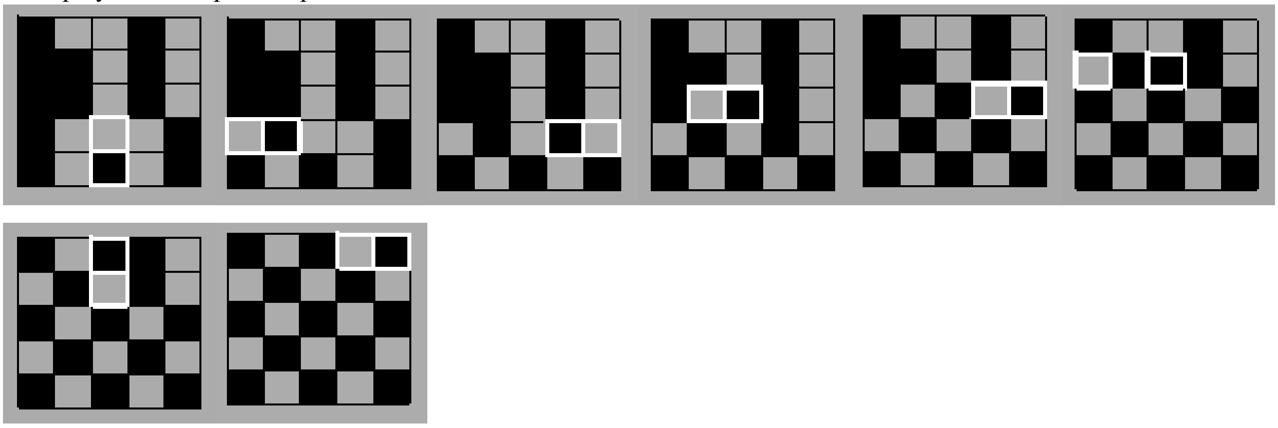
Na obrázkoch si vyznačíme bielymi krížikmi tie políčka, ktoré majú nesprávnu farbu



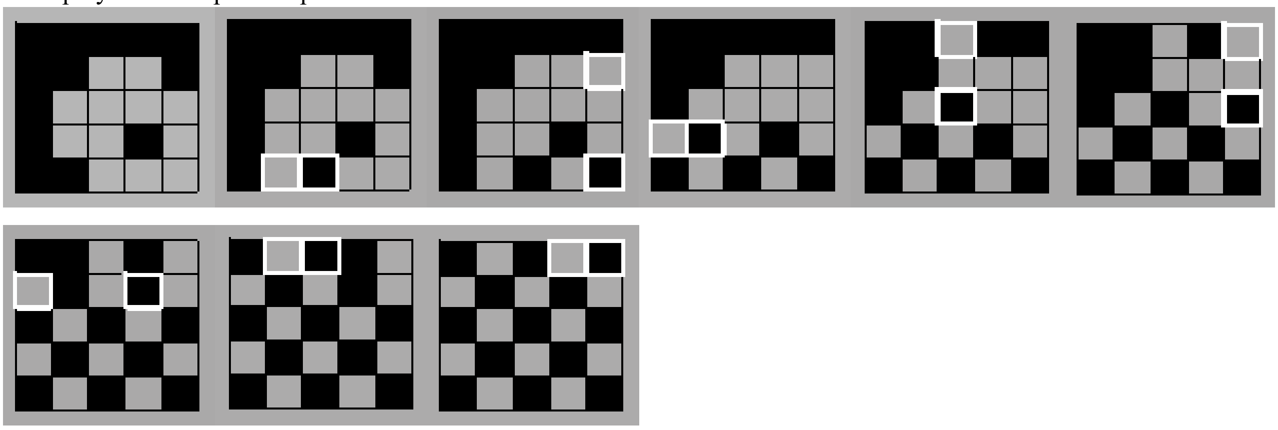
obrázok 1 obrázok 2 obrázok 3

V prvom obrázku má nesprávnu farbu 14 políčok. Keďže pri jednom ťahu vymieňame dve políčka, platí, že minimálny počet ťahov bude 14:2=7 ťahov. Keď si však všimneme políčko A2 a pozorne si prezrieme stĺpec aj riadok, v ktorom sa nachádza, tak zistíme, že sa v nich nenachádza žiadne políčko, s ktorým by bolo výhodné toto čierne políčko vymeniť. (Výhodné by bolo vymeniť ho za biele políčko, ale nie za hocijaké. Iba za také, ktoré nie je správne umiestnené a treba ho vymeniť za čierne.) To znamená, že na to, aby sme toto políčko vymenili s nejakým iným tak, aby bolo na správnom mieste, budeme namiesto jedného ťahu potrebovať minimálne dva ťahy, čiže o jeden ťah navyše ako sme pôvodne predpokladali. Ostatné políčka sa dajú vymeniť na jeden ťah. Minimálny počet ťahov pri prvom obrázku teda bude 7+1=8.
V druhom obrázku má nesprávnu farbu 12 políčok. Keďže pri jednom ťahu vymieňame dve políčka, platí, že minimálny počet ťahov bude teda 12:2=6. Keď si však všimneme políčka A2 a D1 a pozorne si prezrieme stĺpce aj riadky, v ktorých sa nachádzajú tak zistíme, že sa v nich nachádza iba jedno políčko, s ktorým by bolo výhodné tieto čierne políčka vymeniť a to D2. Keď tam však jedno z nich presunieme (napríklad A2) tak v riadku a stĺpci, v ktorom sa nachádza druhé políčko (D1, obrázok 3) neostane žiadne políčko, s ktorým by bolo výhodné ho zameniť. To znamená, že na to, aby sme toto políčko vymenili s nejakým iným tak, aby bolo na správnom mieste budeme namiesto jedného ťahu potrebovať minimálne dva ťahy, čiže o jeden ťah navyše ako sme pôvodne predpokladali. Rovnaká situácia nastáva s políčkami A4 a B1 (jediné políčko s ktorým sa dá vymeniť na jeden ťah výhodne je B4), takže tým získavame ďalší ťah navyše. Ostatné políčka sa dajú vymeniť na jeden ťah. Minimálny počet ťahov pri druhom obrázku teda bude 6+2=8.
Takže predpokladaný minimálny počet ťahov pri oboch obrázkoch je 8. Teraz už stačí nájsť ľubovoľný postup vymieňanie políčok, aby sme na 8 ťahov dostali šachovnicu. Jeden z možných postupov je takýto (vždy sú bielou vyznačené tie dve políčka, ktoré sme akurát vymenili):

Postup vymieňania políčok pri 1. obrázku:



Postup vymieňania políčok pri 2. obrázku:



Odpoveď: Pri oboch obrázkoch je potrebných minimálne 8 ťahov.

Komentár: *Mnohí z vás ste mali buď zle preložené zadanie alebo ste ho zle pochopili a riešili ste príklad tak, že ste políčka buď iba o jedno posúvali, alebo ste menili iba susedné políčka. Takisto bol problém s odôvodnením, prečo sa to nedá zvládnuť na menej ťahov: buď nebolo žiadne, alebo nedostatočné. Za správnu odpoveď ste mohli získať maximálne tri body, ďalšie dva boli za odôvodnenie a jeden za napísanie postupu, ako ste riešili a ako sa dajú povymieňať políčka minimálnym počtom ťahov. Pri nesprávnom zadaní ste mohli získať najviac 5 bodov a pri nesprávne pochopenom zadaní (sem sme zaradili aj tých, ktorí svoj preklad zadania nenapísali, pretože v tom prípade sa nedalo určiť, či chyba nastala v preklade alebo v pochopení zadania) najviac 4 body.*