RIEŠKY

10. ročník – zimná séria

matematický korešpondenčný seminár

Ahojte Rieškarčatká☺

Hurá, prvá Séria za nami, už len dve☺. Ale aj na Tie sa môžete tEšiť, lebo náš kráSny chrumKavučký časopis s výstižným názvom☺ má noVý krásny dizajn, takžE sa tu z toho všetci tešíme ☺.

Toľko na úvod a teraz počasie☺. Dnes boLo mierne chladno, 4 až 7 °C, na severe zrážky... ☺

Neviem ako vy, ale ja sa veľmi tešÍm na púšťanie šarkanov. Predstavte si, že kráčAte po lúke, zrazu fúka vietor, padajú listy a kýM si odpoviete na otázku, prečo padajú na lÚke listy, tak zistíte, že sa vám šarkan zamotal do koruny stromu. Ale aj to sa Dá ešte pRežiť☺. Horšie sú elektrické vedenIa ☺.

Asi toľko k informáciami nabitému a dôležitému úvodu☺.

HaLucinka☺

Vzorové riešenia prvého kola zimnej série 2007/2008

Príklad č. 1 (opravovali Mišo, Marta, Jakuub):

V krajine žije na začiatku 99 princezien, 100 princov a 2 draky. Každý z nich dokáže spôsobiť smrť niekomu inému, hoci princezné to zrejme robia nechtiac. Našou úlohou je zistiť, ktorý tvor môže ostať nažive ako posledný a jediný. Máme teda tri možnosti, princezná, princ alebo drak. Keďže zadanie nezakazuje, aby sa do jednej princeznej zamilovali viacerí princovia, aby jeden drak zožral viacero princezien alebo aby jeden princ zabil viac drakov, budeme uvažovať, že je to dovolené. Počas šťastného nažívania v krajine, sa môžu tvory nejako stretávať. Skúsme si predstaviť nejaký postup stretávania tvorov v krajine. Čo keby to prebehlo takto: drakov je málo a nechceme ich hneď vyhubiť, tak skúsme stretnutia princezien a princov. Napríklad, že sa rovno 99 princovia, teda všetci okrem jedného, zamilovali, a od lásky im pukli srdiečka. Potom sa objavili naši dvaja draci a postupne požrali 99 princezien, teda všetky okrem jednej. Na to sa už nemohol pozerať jediný preživší princ a v tuhom boji jedného draka zabil. Ostala nám teda 1 princezná, 1 princ a 1 drak. Nuž a teraz závisí len od poradia, v ktorom sa stretnú. Rozoberme si to podrobnejšie:

1.možnosť: Princ zabije draka, potom stretne princeznú a pukne mu srdce. Ostane práve jedna princezná.
2.možnosť: Drak zožerie princeznú a potom umrie mečom princa. Ostane práve jeden princ.
3.možnosť: Princovi pukne srdce po stretnutí s princeznou, ktorá následne umiera v papuli draka. Ostane práve jeden drak.

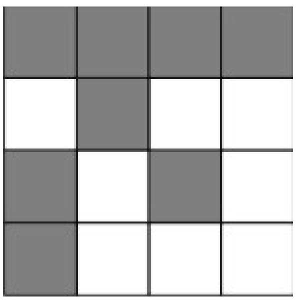
Teda sme si ukázali, že **tvor, ktorý prežil, mohol byť ľubovolný, princezná, princ i drak.**

Komentár: *Tento príklad bolo možné riešiť ľubovolnými ukážkami, ako mohol daný tvor prežiť. Väčšinou ste uprednostnili tri rôzne ukážky, čo je však úplne v poriadku. Treba si zvyknúť, že treba písať aj odpoveď.. Za správny výsledok sme dávali 3b, za ukážku, ako mohol daný tvor prežiť, boli 2b (čiže 6b za všetky tri), no a 1b za spojenie všetkého.*

Príklad č.2 (opravovala Jankaa, Monča, Kozzy):

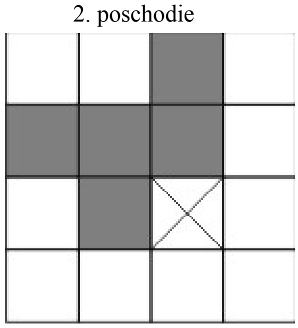
Pre lepšie počítanie malých kociek si prekreslíme to, čo máme v zadaní na tých dvoch pohľadoch, na náš útvar. Predstavte si, že ho rozrežeme na poschodia. A teraz si nakreslíme tieto poschodia tak, ako keby sme sa na každé z nich pozerali zhora zvlášť.

1. poschodie



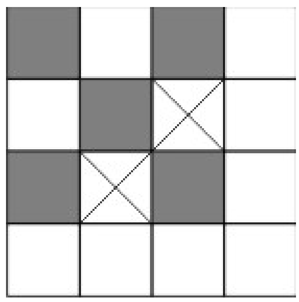
Chýba 8 kociek.

2. poschodie



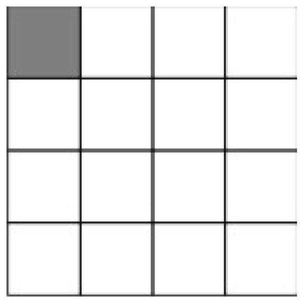
Chýba 11 kociek.

3. poschodie



Chýba 11 kociek.

4. poschodie



Chýba 15 kociek.

Existujú dva spôsoby ako sa príklad dal pochopiť a riešiť.

1. možnosť:

Vyplníme celú kocku týmí malými kockami.

Najmenšia veľká kocka je 4*4*4, lebo najviac 4 malé kocky sa nachádzajú v niektorom rade/stĺpci/výške. Ak ju chceme vyplniť celú, stačí nám zrátať počet bielych políčok na poschodiach (aj tie s krížikom). Čo je 8+11+11+15 = **45 malých kociek.**

2. možnosť:

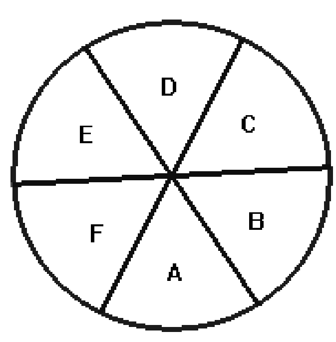
Vo vnútri veľkej kocky môžu byť prázdne miesta.

V pohľadoch uvidíme kocku 4*4*4, no môže mať v sebe dutiny, aby sme „ušetrili“ kocky. To znamená, že spodné a horné poschodie musíme vyplniť, rovnako aj boky druhého a tretieho, aby sme videli „plášť“ celej veľkej kocky. A tie malé kocky vo vnútri (na obrázku sú vyznačené krížikom) tam už dať nemusíme. Takže nám stačí doplniť 42 malých kociek (42 = 45-3).

Komentár: *Veľmi často sa vám stalo, že ste nerozmýšľali nad tým, že vo vnútri veľkej kocky môžu byť dutiny, čím sa dali „ušetriť“ kocky. No dohodli sme sa, že to už je riadna finta, a tak sme tým, čo na to neprišli, ubrali len 1 bod. Veľmi často ste porobili numerické chybičky, za ktoré podľa závažnosti išli dole 1 alebo 2 body. Tiež ste mali problém s postupom, ktorý často neobsahoval všetko, čo bolo dôležité. Tak podľa závažnosti sme vám strhli 1 až 5 bodov. A často ste nemali odpoveď. Za čo sme body nestrhávali, ale len preto, že je prvá séria. V druhej už si na to dajte poriadny pozor.*

Príklad 3 (opravovali Halucinka, Gabika):

A (okrem GAMČE):



Výseky stola sme si proti smeru hodinových ručičiek označili *A, B, C, D, E* a *F.*

Všetky mince chceme premiestniť napríklad do výseku *A*. Povedzme si, na koľko ťahov vieme každú jednu mincu premiestniť do výseku *A*.

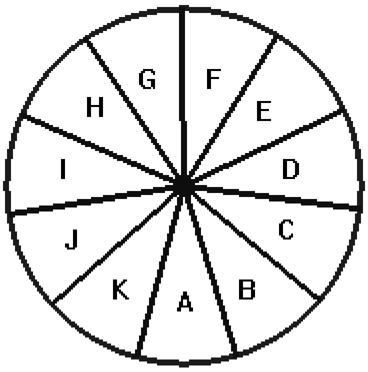
Mincu z výseku *B* vieme premiestniť do výseku *A* na 5 ťahov (= nepárny počet ťahov) proti smeru hodinových ručičiek, alebo na 1 ťah (= nepárny počet ťahov) v smere hodinových ručičiek. Avšak pokiaľ spravíme fintu☺ a túto mincu z výseku *A* premiestnime znova do výseku *B* a potom späť, tak

mincu z výseku *B* vieme do výseku *A* premiestniť na 3 ťahy. A túto fintu môžeme spraviť znova a znova☺, takže vlastne mincu z výseku *B* vieme premiestniť do výseku *A* na ľubovoľný nepárny počet ťahov.
Mincu z výseku *C* vieme do výseku *A* premiestniť na 4 ťahy proti smeru hodinových ručičiek (= párny počet ťahov), alebo na 2 ťahy v smere hodinových ručičiek (= párny počet ťahov). Avšak pokiaľ opäť spravíme fintu☺, tak túto mincu vieme do výseku *A* premiestniť na 2+2 ťahov, 2+2+2 ťahov... , teda na každý párny počet ťahov.
Mincu z výseku *D* vieme do výseku *A* premiestniť na 3 ťahy proti smeru hodinových ručičiek (= nepárny počet) a na 3 ťahy v smere hodinových ručičiek (= nepárny počet). Ak použijeme našu fintu☺, tak túto mincu vieme do výseku *A* premiestniť na 3+2 ťahov, 3+2+2 ťahov..., teda na každý nepárny počet ťahov, okrem 1.Výsek *E* leží v rovnakej vzdialenosti od *A* ako výsek *C*, takže situácia je podobná. Mincu z výseku *E* vieme do výseku *A* premiestniť na 2 ťahy , alebo na 4 ťahy (oba počty sú párne) . Za pomoci finty☺ vieme spraviť z 2 ťahov 2+2 ťahov, 2+2+2 ťahov... , teda každý párny počet ťahov.
Podobne ako *B* je od výseku *A* položená aj minca *F. Tú teda* vieme do výseku *A* premiestniť na 1 ťah, alebo na 5 ťahov , obidva počty sú nepárne. Pokiaľ spravíme fintu☺, tak túto mincu vieme do výseku *A* premiestniť na 1+2 ťahov, 1+2+2 ťahov... , teda na každý nepárny počet ťahov.
A napokon mincu z výseku *A* vieme premiestniť na 0 ťahov, čo použitím finty☺ môžeme zvýšiť na 2, 4, 6...., teda ľubovoľný párny počet ťahov.

Mince *B*, *D* a *F* vieme premiestniť do výseku *A* na nepárny počet ťahov a mince *A*, *C* a *E* vieme do výseku *A* premiestniť na párny počet ťahov. Takže spolu sa všetky mince z *A, B, C, D, E* a *F* dajú premiestniť na nepárny počet ťahov (3-krát nepárny počet ťahov + 3-krát párny počet ťahov = nepárne číslo). Teda 20 ťahov sa nedá dosiahnuť.

Odpoveď: Všetky mince sa do výseku *A* nedajú premiestniť na presne 20 ťahov.
Komentár: *Veľa z vás neodôvodňovalo svoje úvahy s párnymi a nepárnymi počtami ťahov, len ste napísali takto to je. Prečo je to tak, to ste si mysleli, že nás trápiť nebude. A trápilo, išli za to bodíky dole. Taktiež sme nemohli dať veľa bodov za riešenie, ktoré pozostávalo LEN zo skúšania. Skúšanie je síce super a môže človeka naviesť k riešeniu, dokonca je to celkom dosť užitočný postup, ale každopádne pokiaľ človek nevyskúša všetky možnosti, tak to nemôžeme brať, že ukázal, že to na 20 ťahov nejde. Preto aj za LEN skúšanie išli bodíky dole. Avšak celkovo ste boli veľmi šikovní a rozdávali sme dosť vysoké počty bodíkov☺.*

B (pre GAMČU):



Výseky stola sme si proti smeru hodinových ručičiek označili *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J* a *K*.

Všetky mince chceme premiestniť do výseku *A*. Je zrejmé, že na 1, 2, 3... ťahy sa to nedá. Na koľko ťahov najmenej sa to teda dá?
Mincu z výseku *A* vieme premiestniť na 0 ťahov☺. Tiež vidíme, že najmenej ťahov dosiahneme práve tak, že mince z výsekov *B, C, D, E* a *F* budeme posúvať vždy v smere hodinových ručičiek, až kým nebudú vo výseku *A* a mince vo výsekoch *G, H, J, I* a *K* budeme posúvať proti smeru hodinových ručičiek, až kým nebudú vo výseku A. Počet potrebných ťahov je v tabuľke 1.

tabuľka 1:

Mincu z výseku:	Premiestnime do výseku *A* na najmenej ... ťahov:
B	1
C	2
D	3
E	4
F	5
G	5
H	4
I	3
L	2
K	1
Spolu	30

Takže teraz máme všetky mince vo výseku *A*. Skúsme si zobrať jednu mincu z výseku *A,* posuňme ju do výseku *B* a potom späť. Znova máme všetky mince vo výseku *A* a spotrebovali sme 32 ťahov, lebo sme takto pridali 2 ťahy. Toto môžeme stále opakovať, čo znamená, že sa mince dajú premiestniť do jedného výseku na ľubovoľný párny počet ťahov väčší alebo rovný 30. Mince teda vieme premiestniť do jedného výseku na 60 aj na milión ťahov.
Teraz príde finta☺. My totiž vieme mince premiestniť do jedného výseku aj na nepárny počet ťahov. A to na 31 (na menej ako 30 to nejde, to sme si už ukázali). Ako teda mince premiestnime na 31 ťahov do výseku *A*? Mince z výsekov *B, C, D* a *E* budeme posúvať v smere hodinových ručičiek a mince vo výsekoch *F, G, H, J, I* a *K* budeme posúvať proti smeru hodinových ručičiek, , až kým nebudú vo výseku *A* (jediný rozdiel je v smere posúvania mince z výseku *F*). Počty ťahov sú znázornené v tabuľke 2.

tabuľka 2:

Mincu z výseku:	Premiestnime do výseku *A* na ... ťahov
B	1
C	2
D	3
E	4
F	6
G	5
H	4
I	3
L	2
K	1
Spolu	31

Teda mince vieme dostať do jedného výseku aj na nepárny počet ťahov (= 31) a tak vieme rovnakým spôsobom (premiestnením mince z výseku *A* do výseku *B* a potom späť a opakovaním tohto postupu) dostať ľubovoľné nepárne číslo väčšie alebo rovné 31. Mince teda vieme do jedného výseku premiestniť aj na 47 ťahov.
Odpoveď: Všetky mince vieme premiestniť do jedného výseku na ľubovoľný počet ťahov väčší ako 29.
Komentár: *Bod až dva sme strhávali, ak ste mali nedostatočne ukázané, že 30 je najmenší počet ťahov. Ďalší bodík až štyri bodíky sme strhávali za to, že ste neodôvodnili vaše úvahy o párnych a nepárnych počtoch ťahov. A dva bodíky boli za napísanie finty☺ a dva bodíky boli za výsledok. Celkovo ste boli veeeľmi šikovní, len trošku nepozorní najme pri tom ukazovaní, že 30 je naozaj najmenej ťahov a že na menej to nejde. Ale viem, že ste to mysleli vlastne skoro všetci dobre☺.*

Príklad č. 4 (opravovali Danka, Tinka, Ľubka):

Príklad ste riešili troma rôznymi postupmi a tak si vysvetlíme každý z nich.

Postup 1. Máme v rade 11- čísel, pričom prvé je 1, druhé je už určené (ale my ho nepoznáme) a jedenáste je 1024. Snažíme sa zistiť, aké číslo je druhé, ak vieme, že každé **ďalšie** (zo zadania vidíme, že to platí teda až od tretieho čísla) číslo sa rovná súčtu všetkých čísel pred ním, teda 1-vé číslo + 2-hé číslo = 3-tie číslo a 1-vé číslo + 2-hé číslo + 3-tie číslo = 4-té číslo. atď.

1-vé číslo = 1

2-hé číslo = x

3-tie číslo = 1-vé číslo + 2-hé číslo = 1 + x

4-té číslo = 1-vé číslo + 2-hé číslo + 3-tie číslo = $1+x+1+x= 2 * (1+x)$

... atď…. takto sme sa postupne dorátali k jedenástemu číslu.

Zapíšeme to do tabuľky:

Poradie	1.č.	2.č.	3.č.	4.č.	5.č.	6.č.	7.č.	8.č.	9.č.	10.č.	11.č.
Výraz	1	x	1+x	2*(1+x)	4*(1+x)	8*(1+x)	16*(1+x)	32*(1+x)	64*(1+x)	128*(1+x)	256*(1+x)

Zo zadania poznáme hodnotu 11.čísla, teda 1024. Z tabuľky vidíme, že si ho rovnako môžeme zapísať ako 256*(1+x). Už len vypočítame jednu rovnicu o jednej neznámej:

$$\begin{aligned} 256*(1+x) &= 1024 \quad / :256 \\ 1+x &= 4 \quad / -1 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

Takže druhé číslo je 3. Ešte urobíme skúšku správnosti a naše x si dosadíme do radu:

Poradie	1.č.	2.č.	3.č.	4.č.	5.č.	6.č.	7.č.	8.č.	9.č.	10.č.	11.č.
Číslo	1	3	1+3=4	1+3+1+3=8	1+3+4+8=16	32	64	128	256	512	1024

Vidíme, že to platí.

Postup 2. Najprv si zistíme vzťah našich 11-ich čísel. Všimneme si, že každé nasledujúce číslo (okrem prvého a druhého) je dvojnásobkom toho predošlého, ale prečo to tak je?.

Jeden z možnýchzdôvodnení : Zoberieme si napríklad piate číslo. Vieme, že 5-te číslo = 1-vé číslo + 2-hé číslo + 3-tie číslo + 4-té číslo. Tiež vieme, že 4-té číslo = 1-vé číslo + 2-hé číslo + 3-tie číslo. Takže v prvej rovnosti si môžeme zameniť za 1-vé číslo + 2-hé číslo + 3-tie číslo hodnotu štvrtého čísla. Teda dostaneme 5-te číslo = 4-té číslo + 4-té číslo.Čiže 5-te číslo je dvojnásobokom predošlého. Týmto postupom by sme mohli ukázať pre každé z čísel v rade (okrem prvého a druhého), že je dvojnásobkom predošlého. Vydelíme 11-te číslo dvoma a dostaneme 10-te číslo, delíme až po 3-tie číslo, kde nám vyšla hodnota 4. Keďže pre prvé a druhé číslo neplatí, že sú dvojnásobkom predošlého, naše neznáme druhé číslo si vyrátame ako rozdiel 1-vého čísla a 3-tieho čísla: 4 - 1= 3.

Postup 3. Tretí spôsob riešenia bolo skúšanie možností doplnenia druhého čísla. Tento spôsob by nebol veľmi rýchly, keby riešenie nebolo 3. Skúšame teda čísla 1, 2, 3, ... dosadiť ako druhé číslo v rade a zrátavame, aké by bolo 11-te číslo. Už pri pri čísle 3 zistíme, že 11-te číslo v rade nám sedí so zadaním. Aby sme ukázali, že 3 je jediným riešením, mali by sme ešte vyskúšať všetky čísla, ktoré len poznáme (teda nielen 1,2,3,... do nekonečna, ale aj -1, ... , a čo desatinné čísla?). Možno sa však nekonečnému skúšaniu vyhnúť tým, že povieme, že každé číslo väčšie ako 3 dosadené na druhé miesto v rade spôsobí, že 11-te číslo radu bude väčšie ako 1024.Takže nabudúce skúste buď prvým alebo druhým spôsobom;) Ťažko by sme totižto ukázali, že nie je žiadne riešenie ani medzi zápornými číslami, ani medzi desatinnými.

Komentár: *Takže by sme vás chceli pochváliť, lebo veľa riešení bolo na 10 bodov:-) Bodíky sme strhávali za nedostatočné vysvetlenie, prečo je každé ďalšie číslo dvojnásobkom predošlého, ďalej ak ste iba skúšali a neukázali, že neexistuje už žiadne iné riešenie. V prípade ak vám chýbal postup, alebo bol veľmi chabý, tak sme strhli viacej bodov:-(Za správne úvahy aj keď s chybným výsledkom ste mohli získať pár bodov plus:-) Celkovo ste tento príklad zvládli veeeľmi pekne:-) Len tak ďalej:-)*

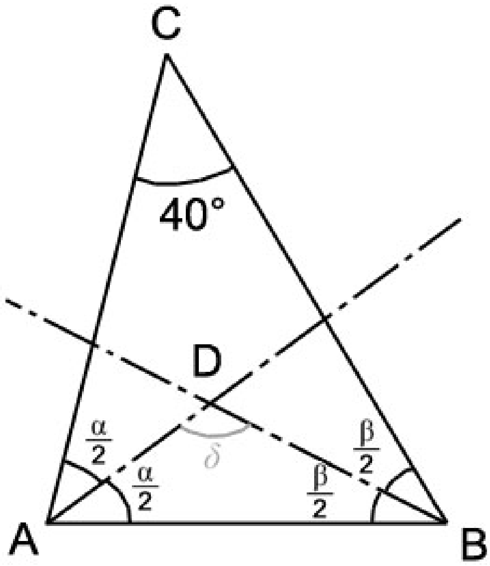
Príklad č.5 (opravovali Ľubka, Sasho, Milan, Maťo, Zuzka):

Najskôr zistíme, kto je botanikom. Vieme, že Antonin a Donatien nie sú botanici, pretože nemajú radi rastliny (3. podmienka) a Barnabe tiež nemôže byť botanikom, pretože hovorí portugalsky a botanik hovorí rusky (2. a 4. podmienka). **Clement** zostal ako jediná možnosť, takže **musí byť botanikom a vedieť po rusky** (2. podmienka). Keďže **Barnabe hovorí po portugalsky** (4. podmienka) a Clement po rusky, pre Antonina a Donatiena zostali dva jazyky, španielský a nemecký. Zo zadania vieme, že **Antonin** nevie po španielsky (5. podmienka), čiže mu zostáva **nemčina** a **Donatienovi španielčina**. Teraz už vieme kto ovláda aký jazyk. Ďalej, podľa 1. podmienky vieme, že ten čo zbiera sklo nevie po nemecky ani po portugalsky, teda sklo nezbiera Antonin (pretože hovorí po nemecky) ani Barnabe (pretože hovorí po portugalsky). Sklo taktiež nezbiera Clement, keďže ten už zbiera rastliny. **Zberateľom skla** môže byť jedine **Donatien**. Ostali už len kamene a mince, a keďže Barnabe nezbiera kamene (4. podmienka), zostali mu len mince a Antoninovi priradíme zvyšné kamene.

Riešenie: Po španielsky hovorí Donatien a zbiera úlomky skla.

***Komentár:** Mnohí z vás tento príklad zvládli výborne a vyslúžili si 10 bodov. A v čom robili chyby tí ostatní? Najčastejšou chybou bol neúplný, nejasný postup alebo ste ho nenapísali vôbec (bodíky išli dole podľa závažnosti prehrešku). Iba za výsledok sme dávali 1 bod. Ak ste len priradili ku každému menu jazyk a záľubu a na postup ste zabudli, tak ste dostali 3 body.*

Príklad č.6 (opravoval Maják, Emi, Marta):



Najskôr si označme potrebné uhly. Nech uhol *CAB* je *alfa* (α), uhol *ABC* je *beta* (β) a uhol *ADB* je *delta* (δ). Keďže *AD* je os uhla *CAB*, tak ho delí na dva rovnako veľké uhly, a to *CAD* a *DAB*, oba s veľkosťou *alfa*/2. Rovnako *BD* je os uhla *ABC*, a preto uhly *ABD* aj *DBC* majú veľkosť *beta*/2. Vieme, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°. Pre ΔABC platí:

$$alfa + beta + 40° = 180° \quad / -40°$$
$$alfa + beta = 140°$$

Pre ΔABD platí:

$$alfa/2 + beta/2 + delta = 180° \quad / *2$$
$$alfa + beta + 2*delta = 360°$$

Teraz za *alfa + beta* dosadíme 140°, na čo sme už prišli:

$$140° + 2*delta = 360° \quad / -140°$$
$$2*delta = 220° \quad / :2$$
$$delta = 110°$$

Náš hľadaný uhol má teda veľkosť 110 stupňov.

***Komentár:** Keďže väčšina riešení bola správna (ste šikovní:-)), tak body (do 5) ste strácali len za nedostatočný popis svojho riešenia, napríklad že ste nenapísali, prečo sa tie uhly rozdelia na dva rovnaké. Ďalšie body (do 5) ste stratili, ak ste si napevno určili uhly alfa a beta. A ak sa vaše riešenie zakladalo na rysovaní, alebo na úplne nepravdivých faktoch, tak ste sa museli uspokojiť so symbolickými 1 až 2 bodmi.*

Príklad č.7 (opravovali etome, Peťo, PeDall):

Hľadáme 5 čísel, ktoré boli napísané na tabuli a vieme ich súčty: 0,2,4,4,6,8,9,11,13,15. Označme si čísla na tabuli od najmenšieho po najväčšie *A,B,C,D,E*. Keby sa niektoré dve čísla rovnali z týchto piatich (napríklad $A=B$), tak vieme, že by vznikli pomocou ostatných troch čísel aspoň tri páry rovnakých súčtov ($A+C=B+C$, $A+D=B+D$, $A+E=B+E$). Také niečo nie je medzi súčtami v zadaní (ani jednej z dvoch častí). Takže čísla *A,B,C,D,E* sú navzájom rôzne.

Aké by boli tie súčty z našich, zatiaľ len písmenkami označených čísel?

A+B, A+C, A+D, A+E, B+C, B+D, B+E, C+D, C+E, D+E (je ich presne 10, ako súčtov v zadaní)

Vieme určite, že súčet dvoch najmenších čísel *A* a *B* bude ten najmenší súčet, teda $A+B=0$. A taktiež vieme, že súčet dvoch najväčších čísel je ten najväčší súčet, teda $D+E=15$. Ešte vieme, že druhý najmenší súčet je $A+C$ ($A+B<A+C$ lebo $B<C$; $A+D>A+C$ lebo $D>C$; $B+C>A+C$ lebo $B>A$, ostatné sú jasne väčšie). Podobne vieme aj, že $C+\mathbf{E}$ je druhý najväčší súčet. Ale o ostatných súčtoch zatiaľ nič neviem!

Takže $A+B=0$, $A+C=2$, $C+E=13$ a $D+E=15$. A upravíme si všetky tak aby sme pomocou *A* mali vyjadrené ostatné písmená.

A+B=0 => B=-A
A+C=2 => C=2-A
C+E=1 => E=13-C=13-(2-A)=11+A
3
D+E=1 => D=15-E=15-(11+A)=4-A

Všimnime si, že v našich súčtoch sa každé písmeno nachádza 4-krát. A teda súčet súčtov (neznie to haluzne ?:) je

$$A+B + A+C + A+D + A+E + B+C + B+D + B+E + C+D + C+E + D+E = 0+2+4+4+6+8+9+11+13+15 = 72$$

to je to isté ako:

$$4A+4B+4C+4D+4E = 72 \quad / :4$$

čiže:

$$A+B+C+D+E = 18$$

Do tejto poslednej rovnosti si za čísla (písmená) *B,C,D,E* dosadíme ich vyjadrenia pomocou *A*-čok, ktoré sme zrátali vyššie. Tak dostaneme rovnosť s *A*-čkami na ľavej strane.

$$A+(-A)+(2-A)+(11+A)+(4-A) = 18$$

teda

$$-A+17 = 18$$
$$A = -1$$

Paráda. Logickým postupom a úpravami sme zistili, že existuje práve jedno riešenie pre číslo *A,* týmto číslom a súčtami sú už určené všetky čísla na tabuli. Tak teda naše hľadané a jediné čísla sú -1,1,3,5,10 :) .

A teraz druhá otázka. Môžu byť súčtami 12,13,14,15,16,16,17,17,18,20? Použijeme rovnakú fintu so súčtami súčtov a dostaneme:

$$4A+4B+4C+4D+4E = 158$$
$$A+B+C+D+E = 39{,}5$$

Ale *A,B,C,D,E* sú celé čísla (v zadaní napísané), a predsa súčet celých čísel nemôže vyjsť desatinné číslo. Preto neexistuje takých 5 čísel, aby boli súčty takéto.

***Komentár:** Tento príklad bol naozaj celkom ťažký. Je to vidno aj na bodoch. Hodnotili sme tak, že za prvú časť 7 bodov a za druhú 3 body. Často ste nemali dokázané, že ste našli všetky riešenia, keď ste skúšali. A ešte rada, keď neviete, alebo len skúšate, tak skúste napísať aspoň ten kúsok, na čo ste prišli, ako ste skúšali, a možno nejaký ten bodík za to bude :)*

Príklad č.8 (opravovali Allie a (-K JohnNy, vzorák MišoF):
A (okrem GAMČE):
Táto hra mala jednoduché pravidlá: dvaja hráči berú striedavo 1, 2, 3, 8 alebo 9 zápaliek a prehrá ten kto vezme poslednú.

Pri vymýšľaní víťazných stratégií je dobré začať tým, že si pre malé počty zápaliek zistíme, kto vyhrá, ak nik nespraví pri hre chybu. Počet zápaliek na stole budeme volať *pozícia*. Pozície budeme deliť na *vyhrávajúce a prehrávajúce,* podľa toho, či existuje postup, ktorý zaručí výhru hráčovi, ktorý je práve na ťahu.
Prehrávajúca pozícia je taká, z ktorej hráč môže ťahať akokoľvek, súper ho vie dostať do ďalšej prehrávajúcej pozície, alebo rovno prehral. **Víťazné pozície** budú všetky, z ktorých viem súpera dostať do tejto prehrávajúcej.

Pozícia s jednou zápalkou je zjavne prehrávajúca – jediné, čo môžeme spraviť, je vziať ju, a tým prehráme.

Pozície s 2, 3 a 4 zápalkami sú vyhrávajúce – zoberieme všetky zápalky okrem jednej, čím súperovi necháme jedinú zápalku na kôpke.

V pozícii s 5 zápalkami sme na tom horšie. Môžeme zobrať 1, 2, alebo 3 zápalky, zakaždým však dostaneme súpera do pozície, z ktorej vie vyhrať. Preto 5 zápaliek bude opäť prehrávajúca pozícia.

A už je jasné, ako budeme pokračovať ďalej. Ak vieme ťahom dostať súpera do prehrávajúcej pozície, je aktuálna pozícia vyhrávajúca. Naopak, ak takýto ťah neexistuje, bude určite po našom ťahu súper vo vyhrávajúcej pozícii, aktuálna pozícia je teda prehrávajúca.

Postupne môžeme zistiť, že:
- pozície so 6,7 a 8 zápalkami sú vyhrávajúce (vezmeme 1, 2, resp. 3 a súperovi necháme 5)
- pozície s 9 a 10 zápalkami sú vyhrávajúce (vezmeme 8, resp. 9 a súperovi necháme 1)
- pozícia s 11 zápalkami je prehrávajúca (vieme vyrobiť pozície 10,9,8,3 a 2, z každej však súper vie vyhrať)
- pozície s 12 až 14 zápalkami sú vyhrávajúce (vezmeme toľko aby súperovi ostalo 11)

A už sa nám to celé začalo pekne opakovať. Pozícia s 15 zápalkami bude prehrávajúca, rovnako ako predtým 5, potom 16 až 20 vyhrávajúce, 21 prehrávajúca, a tak dokola. **Prehrávajúce budú vždy tie pozície, ktoré majú poslednú cifru 1 alebo 5.**

Pozícia s 55 zápalkami bude prehrávajúca. Ak teda druhý hráč nespraví chybu, hru vyhrá on. A vlastne sme už aj zistili, akým postupom. Jeho cieľom bude zabezpečiť, aby svojim ťahom vždy dostal súpera do prehrávajúcej pozície. Jednou vetou: **Pre 55 zápaliek druhý hráč zaručene vyhrá, ak bude ťahať tak, aby po jeho ťahu počet zápaliek vždy končil cifrou 1 alebo 5.**

B (pre GAMČU):
Najskôr si prečítajte vzorák z časti A :). Pribudla nám nová kôpka, z ktorej môžeme odoberať 1, 3 alebo 9 zápaliek. Starú kôpku (tú, z ktorej môžeme brať 1, 2, 3, 8, alebo 9) nazvime A a tú novú B. Pozície v našej hre budeme zapisovať *(počet na kôpke A, počet na kôpke B)*. Teda pozícia zo zadania bude *(47,6)*.

Samozrejme, aj teraz by sa dalo začať postupne rozoberať, ktoré pozície sú vyhrávajúce a ktoré prehrávajúce. Skúsme si však poradiť bez toho.

Všimnime si, že z kôpky B vždy berieme nepárny počet zápaliek. Ak by sa hralo len s kôpkou B, je teda vopred jasné, kto vyhrá – ak je na začiatku na kôpke B párny počet zápaliek, vyhrá prvý hráč, inak druhý.

Všimnime si teraz **pozíciu *(a,b)*, kde *a* končí 1 alebo 5, a *b* je párne**. Tvrdíme, že takáto pozícia je **prehrávajúca**. Druhý hráč totiž môže hrať nasledovne: Tvári sa, že existuje len kôpka A, a ťahá tak, ako sme vymysleli v predchádzajúcom riešení. S jedinou výnimkou: ak prvý hráč niekedy potiahne z kôpky B, potiahne aj druhý hráč z kôpky B. (To určite vie spraviť. Je jedno, koľko zápaliek z kopy B vezme, trebárs vždy jednu.)

Skôr či neskôr sa stane jedna z dvoch vecí:
a) Ťahom druhého hráča sa minie kôpka B. V tomto okamihu ostala prvému hráčovi len kôpka A, a tam je v prehrávajúcej pozícii.
b) Prvý hráč je donútený zobrať poslednú zápalku z kôpky A. V tomto okamihu ostáva kôpka B a na nej párny počet zápaliek. Druhý hráč (ktorý sa práve dostal na ťah) teda opäť zvíťazí.

Naopak, **pozícia *(a,b)*, kde *a* končí 1 alebo 5, a *b* je NEpárne, je vyhrávajúca**. Vyhrávajúca stratégia: vezmeme jednu zápalku z kopy B, čím sme dostali súpera do prehrávajúcej pozície.

Z rovnakého dôvodu je **vyhrávajúca** aj **pozícia *(a,b)*, kde *a* NEkončí 1 alebo 5, a *b* je párne**. Tentokrát stačí upraviť počet zápaliek na kope A tak, aby končil 1 alebo 5, čo určite vieme dosiahnuť.

Všimnite si, že toto nám už stačí na to, aby sme vedeli vyriešiť konkrétny príklad zo zadania. Pozícia (47,6) je vyhrávajúca, teda existuje vyhrávajúca stratégia pre prvého hráča. Ten musí začať tým, že z kopy A vezme dve zápalky.

Teraz ešte o zvyšných pozíciách rozhodneme, čo sú zač.

Zostali nám teda **pozície *(a,b)*, kde *a* NEkončí 1 alebo 5, a *b* je NEpárne**. Niektoré z nich budú vyhrávajúce, niektoré prehrávajúce. V prvom rade si všimnime, že nemá zmysel ťahať z kopy B, to by sme súpera určite dostali do vyhrávajúcej pozície. Musíme teda nájsť vhodný ťah z kopy A.

Tu už použijeme osvedčený postup, začneme od najmenších hodnôt. Dostávame:

- Ak a=0, máme len kopu B nepárnej veľkosti, a teda prehráme.
- Ak a=2 alebo a=3, vezmeme všetko z kopy A, čím necháme kopu B súperovi a vyhráme.
- Ak a=4, prehráme (pozície s a=1, a=2 aj a=3 sú vyhrávajúce)
- Ak a=6 alebo a=7, vyrobíme a=4 a súper je v prehrávajúcej pozícii
- Ak a=8 alebo a=9, vyrobíme a=0 a súper je v prehrávajúcej pozícii
- Ak a=10, prehráme
- Ak a=12 alebo a=13, … a už sa nám to zase začalo opakovať. Prehrávajúce budú teda tentoraz tie pozície, kde a končí 0 alebo 4.

Zhrnutie: V tejto hre sú prehrávajúce tie pozície *(a,b),* kde buď *b* je párne, *a* končí cifrou 1 alebo 5, alebo *b* je nepárne, *a* končí cifrou 0 alebo 4.

Komentár: *Tento príklad bol dosť náročný, čo sa odrazilo na počte riešení aj na celkovej úspešnosti riešiteľov. Na prvú otázku bola v oboch prípadoch odpoveď áno, za ktorú ste mohli dostať nejaký ten bodík, ak ste aj ukázali, že to naozaj ide. Zvyšné získateľné body boli rozdelené medzi taktiku prvého hráča a počty pre výhru druhého hráča. A ešte najčastejšie chyby, ktoré sa u vás vyskytli.* **Naozaj poriadne si vždy prečítajte zadanie.** *Viacerí z vás totiž hľadali počiatočné počty, pri ktorých vyhrá prvý hráč bez ohľadu na to, ako bude hrať druhý, aj keď zadanie sa pýta na presne opačné počty. Veľa z vás tiež nezdôvodnilo, že nimi nájdené riešenia sú všetky. Áno, naozaj treba nájsť všetky riešenia. ;)*

Príklad č. 9 (opravovali Wilko, Paľo, Natali):

Zo zadania vyplýva, že páter Fabien musí mať dvojciferný vek, označme si ho *F. Ak by* Fabien mal jednociferný vek, potom Reoul by musel mať trojciferný vek, to by ale znamenalo, že je starší ako Fabien, čo odporuje zadaniu. Keďže Fabien má dvojciferný vek, jeho „vnuk“, Reoul, musí tiež mať dvojciferný vek (aby bolo číslo, ktoré vznikne napísaním veku vnuka pred vek pátra, štvorciferné) označme si Reoulov vek *R*. Fabienov druhý „vnuk“, Sylvien, nech má vek *S.* Keď vynásobíme veky všetkých troch, dostaneme rovnaké štvorciferné číslo ako keď pred Fabienov vek napíšeme vek Raoulov. Toto vyjadruje rovnica $100R + F = R * F * S$

Na ľavej strane máme štvorciferné číslo, ktoré vzniklo napísaním čísla *R* pred číslo *F.*

Keď vydelíme túto rovnicu *R* dostaneme:

$$\frac{100R+F}{R} = F * S$$

čo je to isté ako

$100 + \frac{F}{R} = F * S$ Teda $100 + \frac{F}{R}$ je celé číslo (lebo *F*S* je celé)*,* čiže aj $\frac{F}{R}$ musí byť celé číslo (to znamená, že *F* je násobkom *R).*

Prepíšme si teda číslo *F* ako *n*R*, kde *n* je nejaký celočíselný koeficient. Keďže *n* vyjadruje hodnotu zlomku $\frac{F}{R}$ (teda pomer *F* a *R*), musí byť menší ako 10 (*F* aj *R* sú dvojciferné čísla, čiže najväčší možný „extrém“ ich podielu je 99/10 = 9,9). Dosaďme *n*R* namiesto *F* do prvej rovnice:

$$R * F * S = 100R + F$$

$$S = \frac{100R+F}{RF}$$

$$S = \frac{100}{n * R} + \frac{1}{R}$$

$$S = \frac{\frac{100}{n}+1}{R}$$

Z tejto rovnice vidíme, že koeficient *n* musí byť deliteľom 100, čo znamená, že to môže byť jedine číslo z množiny $\{2,4,5\}$ (n nemôže byť 1, pretože podľa zadania sa *R* nemôže rovnať *F,* a *n* je menšie ako 10, viď hore)Poďme vyskúšať všetky možnosti pre *n*:

- *n*=2: $S = \frac{\frac{100}{2}+1}{R} \Rightarrow S = \frac{51}{R}$. Z toho vyplýva, že *R* musí byť deliteľom 51, čo znamená, že musí byť z množiny $\{1,3,17,51\}$. Z predchádzajúceho vieme, že *R* musí byť dvojciferné, čiže to môže byť 17 alebo 51. Ďalej vieme, že

$\frac{F}{R} = n \Rightarrow \quad F = n * R$, takže keď R=51, tak F=102, čo nesedí s tým, že Fabien nemá viac ako 99 rokov. Keď R=17, tak F=34. To znamená, že štvorciferné číslo zo zadania je 1734, čo znamená, že Sylvien má $\frac{1734}{17 * 34} = 3$ roky.

- n=4: $S = \frac{\frac{100}{4}+1}{R} \Rightarrow \quad S = \frac{26}{R}$. Z toho vyplýva, že R musí byť deliteľom 26, čo znamená, že musí byť z množiny $\{1,2,13,26\}$. Z predchádzajúceho vieme, že R musí byť dvojciferné, čiže to môže byť 13 alebo 26. Keby R=26, tak F=4*26=104, čo nesedí s tým, že *Fabien* nemá viac ako 99 rokov. Keď R=13, tak F=13*4=52. To znamená, že štvorciferné číslo zo zadania je 1352, čo znamená, že Sylvien má $\frac{1352}{13 * 52} = 2$ roky.
- n=5: $S = \frac{\frac{100}{5}+1}{R} \Rightarrow \quad S = \frac{21}{R}$. Z toho vyplýva, že R musí byť deliteľom 21, čo znamená, že musí byť z množiny $\{1,3,7,21\}$. Z predchádzajúceho vieme, že R musí byť dvojciferné, čiže to môže byť 21. Avšak, ak R=21, tak F=21*5=105, čo nesedí s podmienkami zo zadania. Takže R nemôže byť 21.

Odpoveď: Jediné dve riešenia sú, že páter má buď **34** alebo **52** rokov.
Komentár: *Tento príklad vám nerobil veľké problémy. Boli ste všetci veľmi šikovní a drvivá väčšina z vás mala správne riešenie. Za malé nejasnosti alebo nedokonalosti ste nejaké tie bodíky strácali... Jedna rada do budúcnosti: Ak nie je v zadaní vyslovene napísane, že stačí nájsť jedno riešenie, musíte nájsť VSETKY riešenia :))*

Príklad Prémia (opravovali Miška, Tuan, Stano, Siky):
Preklad:
Sto ľudí stojí na jednej strane úzkej lávky cez obrovskú priepasť, v ktorej sú levy. Ak sa chcú zachrániť, musia čo najskôr prejsť na druhú stranu. Majú medzi sebou architekta, ktorý vraví: „Lávka má teraz nosnosť 10 ľudí. Akonáhle však po nej naraz (tzn., že na lávke budú v jednom okamihu) prejde počet ľudí väčší alebo rovný než polovica jej maximálnej nosnosti (pri nepárnych číslach sa zaokrúhľuje nahor), jej nosnosť sa zmenší o jedného človeka!“ (tzn. Ak má lávka nosnosť desať ľudí a prejde ňou skupinka viac ako štyroch ľudí, tak bude mať lávka už nosnosť len deväť ľudí.) „Fajn, ale ako rýchlo dokážeme všetci prejsť cez lávku, veď každému z nás to trvá minútu a za dvadsať minút prídu vojaci s baranidlom?“ Najviac koľko ľudí sa môže zachrániť a ako to majú spraviť?

Najprv si musíme uvedomiť, že ľudí budeme púšťať v 1-minútových intervaloch, lebo:
1) Ak počet ľudí pustených v menej ako 1-minútovom intervale spôsobí zníženie nosnosti lávky, nebudeme vedieť kedy sa tak stane. Príklad potom nemá zmysel.
2) Ak počet ľudí pustených v menej ako 1-minútovom intervale nespôsobí zníženie nosnosti lávky, bude to neefektívne. Pretože, keď istý počet ľudí pustíme v skupine dôjdu naraz. Keby dochádzali po jednom, všetci budú na druhej strane za čas o 1 minútu väčší.
Každú minútu budeme púšťať nejakú skupinku ľudí.
Keby vôbec nepoškodili lávku: Pustíme *20* skupiniek po *4* (5 ľudí už spôsobí zníženie nosnosti na *9*). Zachránime *20 x 4 = 80* ľudí.
Keby poškodili lávku 1-krát: Neoplatí sa lávku poškodiť na začiatku, lebo bude dlhší čas poškodená a teda aj s menšou nosnosťou, ako keby sme ju poškodili úplne na konci. Poškodíme ju na konci, aby mohlo postupne prejsť viac ľudí. Poškodiť ju môžeme tak (aby sa nezrútila), že pustíme od *5* do *10* ľudí, vždy sa oplatí poškodiť ju pustením, čo najväčším možným počtom ľudí (aby sa ešte nezrútila), v tomto prípade *10.* Pôjde 19 skupiniek po 4 a 1 skupina s 10 ľuďmi. Zachránime *19 x 4 + 10 = 86* ľudí (namiesto jednej 4-člennej skupiny pustíme jednu 10-člennú skupinu).
Keby poškodili lávku 2-krát: Oplatí sa ju poškodiť dvoma poslednými skupinkami z hore uvedeného dôvodu, do nich pustíme čo najviac ľudí (*10* v predposlednej a *9* v predposlednej skupine z dôvodu zníženia nosnosti lávky). Zachránime *18 x 4 + 10 + 9 = 91* ľudí (namiesto dvoch 4-členných skupín pustíme jednu 10-člennú a jednu 9-člennú skupinu).
Keby poškodili lávku 3-krát: Zas sa budeme do posledných troch skupín snažiť pustiť čo najviac ľudí. V prvej z posledných troch skupín pustíme *10* ľudí, potom len *9* a *8*, lebo sa znižuje nosnosť lávky. Zachránime *17 x 4 + 10 + 9 + 8 = 95* ľudí.
Keby poškodili lávku 4-krát: Do posledných štyroch skupín pustíme *10, 9, 8* a *7* ľudí (dôvody prečo sú hore). Zachránime *16 x 4 + 10 + 9 + 8 + 7 = 98* ľudí.
Keby poškodili lávku 5-krát: Do posledných päť skupín pustíme *10, 9, 8, 7* a *6* ľudí (dôvody prečo sú hore). Zachránime *15 x 4 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 100* ľudí (všetkých!). Avšak je tu ešte jedna otázka a to, aký maximálny počet ľudí dokážeme zachrániť.
Keby sme lávku poškodili 6 krát, počet zachránených ľudí by sa zvýšil (o *1*), lebo namiesto jednej 4-člennej skupiny pustíme jednu 5-člennú skupinu.
Keby sme však lávku poškodili 7-krát alebo viackrát, už by sa počet zachránených nezvýšil, ba dokonca znížil (lebo namiesto 4-členných skupín by sme zachraňovali skupiny so *4* a menej ľuďmi).
Sto ľudí dokáže utiecť pred vojakmi. Najviac sa ich dokáže zachrániť *101.*

Komentár: *S prekladom väčšina z Vás nemala problémy. Pri riešení však treba dávať pozor, aby ste príklad správne pochopili a radšej si ho viac krát prečítať. Najkľúčovejšie bolo si uvedomiť, že ľudia pôjdu v minutových intervaloch po skupinkách, inak by príklad nemal zmysel. Tiež nešlo o náhodné skúšanie, ale bolo treba ukázať, že to Vaše riešenie je jediné správne (s najväčším možným počtom zachránených). Najjednoduchšie si nájsť spôsob ako vymenovať všetky rozumné možnosti, tie odskúšať v riešení a ostatné rozumným zdvôvodnením vylúčiť.*

Ak ste nepochopili zadanie, neriešili ho, alebo riešili zle dostali ste 0 až 2 body. Ak ste riešili dobrým postupom, ale pre nedostatočné overenie všetkých možností neprišli ku správnemu výsledku, dostali ste 2 až 4 body. Ak ste mali spávny výsledok a nejaký postup 5 bodov.

Pri každom príklade sa veľký dôraz prikladá napísaniu správneho a jednoznačného postupu. *Jednoducho aj v tomto príklade bolo potrebné napísať, ako ste na výsledok prišli a ako viete, že je jediný správny. Ak ste sa k tomu dostatočne priblížili dostali ste 6 bodov.*