Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2007/2008

Príklad č. 1 (opravovala Danka):

Na začiatku si musíme uvedomiť, že keď v lete uschne púčik, tak ostane len *jedna* vetvička bez púčika. Ale na jar sa na tejto vetvičke môže zase vytvoriť púčik. Ak púčik neuschne, tak z jednej vetvičky vyrastú *tri* vetvičky.

1. rok: Na stromčeku sú tri vetvičky. Na jar sa na každej z nich vytvorí jeden púčik (máme 3 vetvičky a 3 púčiky). V lete jeden púčik uschne (3 vetvičky, 2 púčiky). Na jeseň vyrastú z každého púčika 3 vetvičky a jedna vetvička nám ostala po vyschnutom púčiku ($2 \cdot 3 + 1 = 7$ vetvičiek).

2. rok: Na stromčeku je 7 vetvičiek. Na jar sa na každej z nich vytvorí jeden púčik (7 vetvičiek, 7 púčikov). V lete dva púčiky uschnú (7 vetvičiek, 5 púčikov). Na jeseň vyrastú z každého púčika 3 vetvičky a dve vetvičky nám ostali po vyschnutých púčikoch ($5 \cdot 3 + 2 = 17$ vetvičiek).

3. rok: Na stromčeku je 17 vetvičiek. Na jar sa na každej z nich vytvorí jeden púčik (17 vetvičiek, 17 púčikov). V lete niekoľko púčikov uschne a na jar 4.roku je na strome 29 púčikov (čiže 29 vetvičiek). Keby žiaden púčik na strome nevyschol, mal by stromček $3 \cdot 17 = 51$ vetvičiek. Nasledujúci rok mal však len 29 vetvičiek.

$$51 - 29 = 22$$

22 vetvičiek na stromčeku chýba. Každý vyschnutý púčik nám zníži počet vetvičiek o dva.

$$22 : 2 = 11$$

V treťom lete vyschlo 11 púčikov.

Problém vyschnutých púčikov sa dal riešiť aj pomocou rovníc. Nech x je počet neuschnutých a y počet uschnutých púčikov v treťom roku. Potom platí: $x + y = 17$. Z každého nevyschnutého púčika vyrástli 3 vetvičky, čiže máme $3 \cdot x$ nových vetvičiek a z uschnutých púčikov nevyrástli nové vetvičky, čiže máme y vetvičiek. Počet vetvičiek na konci tretieho roku a teda aj počet púčikov na začiatku štvrtého roku je $3 \cdot x + y = 29$. Z prvej rovnice zistíme, že $x = 17 - y$, a to dosadíme do druhej rovnice:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (17 - y) + y &= 29 \\ 51 - 2 \cdot y &= 29 \\ 2 \cdot y &= 22 \\ y &= 11 \end{aligned}$$

Odpoveď: Počas tretieho leta uschlo na stromčeku 11 pukov.
Komentár: Najväčším problémom bolo, že veľa z vás zabudlo na vetvičky, ktoré ostali po uschnutých pukoch a mysleli ste si, že počet vetvičiek aj púčikov musí byť deliteľný tromi. Preto sa vám ani nepodarilo nájsť výsledok. Ale boli aj pekné riešenia s prehľadnými obrázkami, ktoré ma potešili. Prajem vám pekné prázdniny a do budúceho roka veľa šťastia.

Príklad č. 2 (opravovali Jakuub, Tinka):

Chceme nájsť všetky trojice cifier a, b, c, pre ktoré platí:

1. sú od seba navzájom rôzne,
2. sú nenulové,
3. ich súčet je menší alebo rovný 15,
4. keď z nich vytvoríme všetky možné trojciferné čísla bez opakovania cifier a zrátame ich, ciferný súčet výsledku bude 15.

Štvrtý bod v praxi vyzerá: Cifry si označíme a, b, c. Všetky trojciferné čísla z nich vytvorené sú $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Využime teraz, že každé prirodzené číslo sa dá rozložiť na jednotky, desiatky, stovky, tisícky, atď. Napríklad číslo 456 viem rozložiť ako $4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ (desiatkový rozklad). Teraz zrátame naše trojciferné čísla, využitím tejto vlastnosti (pomôžeme si tabuľkou 1):

Stovky	Desiatky	Jednotky
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Tabuľka 1: Pomocná tabuľka pre sčítavanie čísel

$$2 \cdot (100 \cdot a + 100 \cdot b + 100 \cdot c) + 2 \cdot (10 \cdot a + 10 \cdot b + 10 \cdot c) + 2 \cdot (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)$$

Upravíme si výraz, vyjmeme zo zátvoriek $100, 10, 1$:

$$2 \cdot 100 \cdot (a + b + c) + 2 \cdot 10 \cdot (a + b + c) + 2 \cdot 1 \cdot (a + b + c)$$

Vyňatím zátvorky $(a + b + c)$ nám vznikne:

$$(a + b + c) \cdot (200 + 20 + 2) = (a + b + c) \cdot 222$$

Zo zadania vieme, že ciferný súčet tohto výrazu má byť 15. Vyjde tento ciferný súčet pre nejakú možnosť dosadenia a, b, c? V tomto prípade bude asi najrozumnejšie vyskúšať všetky možnosti pre *súčet* $(a + b + c)$ (pretože iba tak dostaneme všetky *rôzne* možnosti výsledného čísla). Keďže čísla a, b, c musia byť rôzne a nenulové, tak ich najmenší možný súčet je $1 + 2 + 3 = 6$. Naopak, najväčší vieme zo zadania: súčet hľadaných cifier je najviac 15.

Odskúšame teda všetky možnosti od 6 do 15. Vynásobíme tieto čísla 222 a z výsledku spravíme ciferný súčet. Ak výjde 15, tak budeme vedieť, aký súčet majú mať čísla a, b, c.

Z tabuľky 2 vidíme, že ciferný súčet sedí len pre $a + b + c = 7$. Už len doplniť správne čísla za a, b, c tak, aby sa neopakovali a nerovnali 0. A taká možnosť je len jediná: $1, 2, 4$.

Odpoveď: Mačka hľadala čísla $1, 2, 4$.

Komentár: Toto bol asi najjednoduchší spôsob a veľa z vás naň prišlo a vyriešilo ho pekne. Občas ste neobjasnili, prečo nám stačí rátať so súčtom hľadaných cifier, takže sme museli niečo strhnúť aj pre nedostatočné vysvetlenia:(. Ak ste na to niektorí šli metódou sčítavania podpísaním pod seba a prechodom cez desiatky, tak ste občas zabudli, že $2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$ (jeden stĺpec z našej pomocnej tabuľky) + zvyšok z predchádzajúceho stĺpcu môže mať iný zvyšok ako predošlý stĺpec, kvôli presiahnutiu cez ďalšiu desiatku. Ak ste napísali len výsledok, alebo ste urobili len pár skúšaní, tak sme takisto museli strhnúť body. Niektorí ste vypísali všeeetky možnosti, čo je síce správne riešenie, ale dosť neefektívne, takže nabudúce skúste pouvažovať nad niečím logickejším. Ale celkom dobre ste to zvládli a snáď budete odmenení sústredkom.

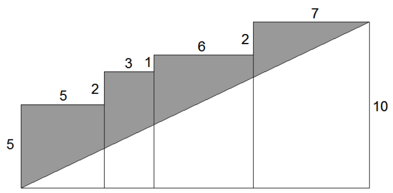
$a+b+c$	$(a+b+c) \cdot 222$	Ciferný súčet	CS rovný 15?
6	1332	9	Nie
7	1554	15	Áno
8	1776	21	Nie
9	1998	27	Nie
10	2220	6	Nie
11	2442	12	Nie
12	2664	18	Nie
13	2886	24	Nie
14	3108	12	Nie
15	3330	9	Nie

Tabuľka 2: Možnosti pre súčet $a + b + c$

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Peťo):

A (okrem Gamče): Vašou úlohou v tomto príklade bolo vypočítať obsah šedej plochy (obrázok 1). Jeden z možných spôsobov, ako ste to mohli urobiť, bol, že od súčtu obsahov obdĺžnikov na obrázku odčítate obsah bieleho trojuholníka. Najprv ste si však museli zistiť ich rozmery. Šírky každého z obdĺžnikov sú uvedené v obrázku zo zadania. Rozmery prvého obdĺžnika zľava sú zjavné zo zadania 5×5. Výšku druhého obdĺžnika získame ako $5 + 2 = 7$, pretože ako vidno na obrázku zo zadania, druhý obdĺžnik je o 2 vyšší ako prvý. Jeho rozmery sú teda 7×3. Podobne zistíme výšku aj tretieho obdĺžnika ($7 + 1 = 8$) a teda jeho rozmery sú 8×6. Výšku štvrtého obdĺžnika vidíme v zadaní, teda jeho rozmery sú $10 \cdot 7$. Biely trojuholník je pravouhlý (jeho uhol na obrázku vpravo dole je uhlom obdĺžnika, preto je pravý). Jedna z jeho odvesien má dĺžku 10 a druhá má dĺžku $5+3+6+7 = 21$ (vypočítali sme to ako súčet šírok obdĺžnikov). Obsah šedej plochy teda bude:

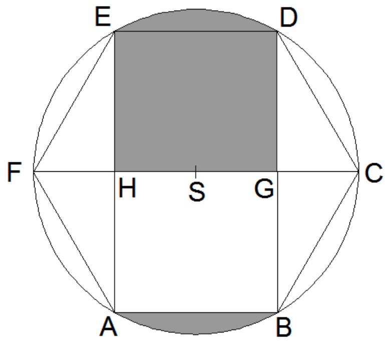
$$S = 5 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 7 - \frac{21 \cdot 10}{2}$$
$$S = 25 + 21 + 48 + 70 - 105$$
$$S = 59$$



Obrázok 1: zadanie príkladu č.3A

B (pre Gamču): Stred šesťuholníka, ktorý je zároveň stredom kruhu označím S. O pravidelnom šesťuholníku vieme, že ho možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov, ktorých strana je rovnako dlhá ako strana šesťuholníka. V tomto prípade to budú trojuholníky ABS, BCS, CDS, DES, EFS a FAS. Obsah jedného z nich (všetky ho majú rovnaký) si označím S_t. Štvoruholník $BCDS$ je kosoštvorec, pretože všetky jeho strany sú rovnako dlhé. Priesečník úsečiek SC a BD označím ako G. Z vlastností kosoštvorca vieme, že jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, teda platí $|GC| = |GS|$. Navyše, keďže sa uhlopriečky kosoštvorca pretínajú v pravom uhle, tak trojuholník SGD je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole G. Obsah trojuholníka SGD je teda polovičný (teda rovný $\frac{1}{2}S_t$) oproti obsahu trojuholníka SCD, pretože pomer ich základní je $|SG| : |SC| = 1 : 2$ a výšky na tieto základne majú rovnaké($|GD|$).

Podobne štvoruholník $ASEF$ je kosoštvorec, pretože všetky jeho strany sú rovnako dlhé. Priesečník úsečiek SF a AE označím ako H. Keďže z vlastností kosoštvorca vieme, že jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, tak aj tu platí $|FH| = |HS|$. Takisto aj trojuholník HSE je pravouhlý s pravým uhlom pri bode H. Obsah trojuholníka HSE je teda polovičný (teda rovný $\frac{1}{2}S_t$) oproti obsahu trojuholníka FSE, pretože pomer ich základní je $|HS| : |FS| = 1 : 2$ a výšky na tieto základne majú rovnaké ($|HE|$). Súčet obsahov trojuholníkov SGD a HSE je teda rovný obsahu jedného z rovnostranných trojuholníkov, na ktoré sme rozdelili šesťuholník (teda S_t). Časť šesťuholníka, ktorá je šedej farby má teda obsah rovný $2S_t$, pretože okrem trojuholníkov SGD a HSE je šedý aj trojuholník SDE. Zvyšok šesťuholníka, ktorý má obsah $6S_t$ je biela, teda jeho biela časť má obsah $4S_t$. Pomer jeho šedej časti k jeho bielej časti je teda $2S_t : 4S_t = 1 : 2$.



Obrázok 2: šesťuholník

Keďže strany šesťuholníka sú rovnako dlhé, tak aj kruhové odseky (časti kruhu, ktoré sú mimo šesťuholníka) majú rovnaké obsahy. Dve z nich sú šedé a štyri sú biele, takže pomer ich obsahov je tiež 1 : 2. To znamená, že aj pomer celej šedej časti kruhu k bielej je 1 : 2.

Odpoveď: Väčší je obsah bielej časti kruhu. Je dvakrát väčší ako obsah šedej časti kruhu.

Komentár: Negamčáci mali svoj príklad skoro všetci správne. Niektorým sme strhli body za nedostatky v postupe. Gamčáci väčšinou šesťuholník rozdelili na menšie trojuholníky (ktorých počty šedej a bielej farby porovnali), len málo z nich však vysvetlilo, prečo sú všetky rovnaké. Za to sme im strhli body podľa ročníka, ktorý navštevujú, pretože znalosti o kosoštvorci získavate až v sekunde.

Príklad č. 4 (opravovali Danielka, Kozy):

Bežcov si označíme A, B, C, D, E. Vieme, že súčet pozícií, na ktorých sa umiestnili v minulom roku je rovnaký ako v tomto roku ($1+2+3+4+5=15$). Zmenou budeme nazývať rozdiel medzi pozíciami, na ktorých sa pretekár umiestnil v minulom a v tomto roku (napríklad, ak bol Adam minulý rok prvý a tento rok sa umiestnil až na štvrtom mieste, zmena bude -3 ($1-4=-3$). Keďže sa celkový súčet pozícií, ktoré obsadili deti, nezmenil, súčet všetkých zmien bude 0.

Zo zadania vieme, že A obháji svoju pozíciu, teda jeho zmena je 0. B sa zlepší o 2 a C sa zhorší o 3, teda súčet ich zmien bude -1. Preto, aby sme zachovali celkovú zmenu rovnú 0, D a E sa spolu musia zlepšiť o 1. Svoju pozíciu obháji iba A, preto ani D a ani E ju neobhájili. Zo zadania vieme, že D sa priblížil k E. Keby sa D zhoršil, E by sa musela zhoršiť ešte viac, teda dokopy by sa zhoršili a súčet ich zmien by bol záporný (my potrebujeme, aby bol 1). Takže D sa musel zlepšiť. Keby sa E zlepšila, dokopy by sa zlepšili o viac ako 1. Súčet ich zmien by bol väčší ako 1, E sa teda musela zhoršiť. Ak by sa E zhoršila o 1, potom D by sa zlepšil o 2 ($2-1=1$). Keby bola E v minulom roku prvá, zhoršila by sa na druhé miesto a keby bol D piaty, zlepšil by sa na tretie miesto. Takto skončia hneď za sebou. E sa nemôže viac zhoršiť a D sa nemôže viac zlepšiť, aby splnili podmienku, že E skončila pred D. Takisto E nemôže byť prvý rok horšia ako prvá a D lepší ako piaty. Preto je prvý rok E prvá a D piaty. Druhý rok je E druhá a D tretí.

poradie	1	2	3	4	5
minulý rok	E				D
tento rok		E	D		

C sa zhoršil o 3 miesta. Aby bol v prvej päťke, musel skončiť minulý rok najhoršie ($5-3=2$) druhý. Prvý skončiť nemohol, lebo prvá bola E. Z toho vyplýva, že C bol minulý rok druhý a tento rok piaty.

poradie	1	2	3	4	5
minulý rok	E	C			D
tento rok		E	D		C

A skončil oba roky na rovnakom mieste, takže mohol byť iba štvrtý. B bola minulý rok tretia a teraz je prvá.

poradie	1	2	3	4	5
minulý rok	E	C	B	A	D
tento rok	B	E	D	A	C

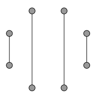
Odpoveď: Jediná správna odpoveď je, že minuloročné poradie bolo: E C B A D. Tohtoročné poradie teda je: B E D A C.

Komentár: Väčšina z vás riešila úlohu skúšaním a skoro všetci ste sa dopracovali k správnemu výsledku. Treba pamätať na to, že za samotný výsledok nie je veľa bodov, preto treba písať aj kompletný postup. Ak ste riešili príklad skúšaním a nevysvetlili ste všetky možnosti, strhávavali sme nejaké body. Niektorým z vás vyšlo viac možností, ako sa deti mohli umiestniť, ale to bolo zapríčinené tým, že ste zabudli, že len Adam obhájil to isté miesto ako minulý rok.

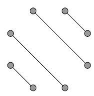
Príklad č. 5 (opravoval Pištík):

Štrnganie sa skončí až vtedy, keď už si každý štrngol s každým (v opačnom prípade by malo podľa pravidiel pokračovať ďalším kolom). Musí si teda štrngnúť každá dvojica detí.

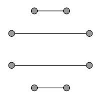
Spočítajme si najskôr, koľko štrngnutí vlastne nastane. Každý z 8 ľudí si musí štrngnúť 7-krát, čo je dokopy $8 \cdot 7 = 56$. Každé štrngnutie sme však zarátali 2-krát, čo značí že ich bude 28. V jednom kole môžu naraz nastať najviac 4 štrngnutia, z čoho je jasné, že kôl bude aspoň 7. Ak by stačilo 7 kôl, v každom kole by museli nastať práve 4 štrngnutia. To však nemôže nastať, keďže, keď si štrngne 1. dieťa s 3. dieťaťom, 2. dieťa (ktoré sedí priamo medzi nimi) si nemôže s nikým štrngnúť, lebo pod jeho nosom si štrngajú jeho susedia a on ich nemôže križovať. To znamená, že 7 kôl nám stačiť nebude, a teda kôl bude aspoň 8. Teraz už stačí nájsť riešenie na 8 kôl, čo nie je až také ťažké. Na obrázkoch ho vidíme. V prvých štyroch kolách si štrngajú deti tak, aby na oboch stranách štrngajúceho páru ostal párny počet detí. V posledných 4 kolách si štrngajú deti tak, aby na oboch stranách páru ostal nepárny počet detí. A toto sú práve tie kolá, keď dve deti ostanú zablokované. Týchto 8 kôl nám stačí na to, aby si každé dieťa štrnglo s každým dieťaťom.



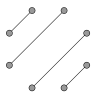
Obrázok 3: 1. kolo



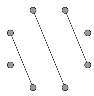
Obrázok 4: 2. kolo



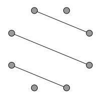
Obrázok 5: 3. kolo



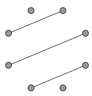
Obrázok 6: 4. kolo



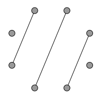
Obrázok 7: 5. kolo



Obrázok 8: 6. kolo



Obrázok 9: 7. kolo



Obrázok 10: 8. kolo

Odpoveď: Na to, aby si štrngol každý s každým je potrebných aspoň 8 kôl.
Komentár: Nájsť riešenie na tých 8 kôl vám nerobilo až také veľké problémy. Niektorí našli riešenie na 10 kôl, avšak neuvedomili si, že dve kolá, v ktorých si štrngajú susedia, sa dajú vložiť do iných štyroch kôl, kde si štrngajú len 2 dvojice susedov (čo je efektívnejšie). Najväčší problém bol, že ste neukázali, že tých 8 kôl je naozaj najmenej. To znamená, že ste neukázali, že na 7 kôl sa to nedá a na menej už ani náhodou. Bez toho, aby ste toto ukázali, nemôžete tvrdiť že 8 kôl je naozaj minimum.

Príklad č. 6 (opravovala Ľubka):

Hovorí sa, že sto ľudí, sto chutí. No v matematike to asi platí dvojnásobne. Teda, aby sme tieto reči uviedli na správnu mieru, čo sa týka práve tohto príkladu, ste ho mnohí pochopili úplne inak. Rozhodovali ste sa medzi variantom, kedy Jožko vždy začal od seba odpočítavať, takže pekne zaradom vypadávali deti po jeho ľavici, a variantom, kde sa vypadávalo postupne v kruhu.

Prvý variant je vcelku jednoduchý na riešenie. Jožko vždy ukazuje na seba a hovorí „A“ a potom na dieťa po jeho ľavici povie „von“. Takto sa deti zredukujú, až zostane posledný, na ktorého Jožko ukáže takisto „von“. Nakoniec nám teda vyjde Jožko ako víťaz.

Pri druhej možnosti už bolo počítanie o čosi zložitejšie. Vieme, že detí v kruhu je 64. Aby sa nám ľahšie počítalo, tak si ich postupne označíme, pričom začneme Jožkom ako jednotkou a pokračujeme v smere hodinových ručičiek. Pri prvom počítaní začne Jožko (1.), ukáže na seba ako na „A“ a potom na človeka po svojej ľavici (2.) „von“. Na ďalšieho v poradí (3.) pripadne „A“ a na jeho suseda (4.) „von“. Takto Jožko odratúva, pričom mu na deti s nepárnym číslom v poradí vždy pripadne „A“ a na tie s párnym „von“ (keďže vypočítavanka je dvojslabičná). To znamená, že keď sa končí prvé kolo, na posledné dieťa v kruhu s číslom 64 pripadne „von“, takže na Jožka vyjde znova „A“. Počet detí sa nám v tomto prvom kole zredukoval o polovicu (o všetky deti s párnym číslom), takže nám zostalo presne $64 : 2 = 32$ detí. Tieto deti majú čísla, ktoré sú nepárne (keďže tie párne nám vypadli v prvom kole) a teda ich čísla sú 1 (Jožko), 3, 5, 7, 9, 11,. . .

Začína sa druhé kolo, v ktorom pripadol znova začiatok na Jožka (ukázali sme pri konci minulého kola) a teda si povie na seba „A“. Na dieťa, ktoré je teraz po jeho ľavici (3.) pripadne „von“, na ďalšie dieťa (5.) zase „A“. Takto to pokračuje striedavo až k číslu 63, ktoré je momentálne po Jožkovej pravici. Ďalej bude potrebné, aby sme si nepárne čísla rozdelili na 2 skupiny a tak vedeli, či číslo 63 vypadne alebo nie. Jednu skupinu si označíme ako tých, ku ktorým keď pripočítame 1 budú deliteľné štyrmi a druhú ako tých, od ktorých budeme musieť 1 odpočítať, aby sme ich vedeli vydeliť štyrmi. Vidíme, že Jožko patrí do druhej skupiny ($1-1=0$; $0:4=0$), jeho sused naľavo (3.) do prvej skupiny ($3+1=4$; $4:4=1$) a takto sa to postupne obmieňa. Keďže vieme, ktoré deti vypadávajú, môžeme si to zovšeobecniť, že prvá skupina vypadáva a druhá naopak postupuje do ďalšieho kola. Teda v tomto prípade postupuje skupina, od ktorých sme jednotku odčítavali. Dieťa po Jožkovej pravici (63.) patrí do prvej skupiny ($63+1=64$; $64:4=16$), takže musí vypadnúť. To znamená, že do ďalšieho kola sa nám nielenže počet opäť zredukoval na polovicu, ale zároveň aj Jožko znova na seba v ďalšom kole ukáže a povie „A“.

Do tretieho kola nám postúpilo $32:2=16$ detí. Sú to deti s číslami 1 (Jožko), 5, 9, 13, 17,… Týchto 16 detičiek si znova rozdelíme na dve skupiny, a to na tie, ku ktorým keď pripočítame 3, budú deliteľné ôsmimi, a na tie, ktoré po odpočítaní 1 budú deliteľné ôsmimi. Jožko patrí znova do druhej skupiny, jeho sused vľavo (5.) do skupiny prvej. Keďže na Jožka znova pripadlo „A“ (podľa minulého kola), tak na suseda po jeho ľavici (5.) vyjde „von“. Po prejdení zbytku kruhu sa dostaneme k poslednému číslu, ktoré zostalo z minula, a to je 61. Toto číslo zaradíme do prvej skupiny, teda v tomto kole vypadne ako posledné a na Jožka zas a znova vyjde začínať v ďalšom kole s „A“.

Vo štvrtom kole už máme iba 8 hráčov a to s číslami 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57. Keďže Jožko (1.) znova začína vypočítavať a pripadne na neho „A“, tak na čísla 9, 25, 41, 57 pripadne „von“ (mohli by sme si tu opäť spraviť skupinky pomocou násobkov 16). Po tejto redukcii nám zostali deti s číslami 1 (Jožko), 17, 33 a 49. Na Jožka znova zostalo „A“ (keďže ako posledné vypadlo číslo 57) a teda v tomto kole vypadnú čísla 17 a 49. Do posledného kola sa preto dostali Jožko (1.) a dieťa s číslom 33.

V tomto momente ale nastáva rozkol. Niektorí ste zadaniu pochopili tak, že máte zistiť, ktoré dieťa zostane Jožkovi posledné, tak ste napísali, že dieťa s číslom 33. Ak ste to však pochopili, že *správna odpoveď je Jožko*, alebo lepšie – ten, kto začína vypočítavať – a zostane ako úplne posledný, tak ste to mali podľa nás správne. Samozrejme, že ako správnu odpoveď sme v tomto prípade uznali obe možnosti, keďže zadanie nebolo úplne jasne formulované.

Komentár: Príklad ste celkovo riešili veľmi pekne, o čom svedčí aj počet desaťbodových riešení. Avšak niektorí z vás trochu zápasili s postupom. Za drobné chybičky a nezrovnalosti sme vám strhli po 1 až 2 bodoch. Ak ste nejaké veci neodôvodnili, alebo bol váš dôkaz nedostatočný, dostali ste o 3 alebo 4 bodíky menej. Postupov, ktorými ste prišli k výsledku bolo mnoho, za čo vás chceme veľmi pochváliť. Takže sa nám držte a píšte stále rovnako super postupy.

Príklad č. 7 (opravovala Halucinka):

Pozrime sa na prvú nádobu, v ktorej je 1 liter čarovného nápoja. Časť z nej, presne x litrov nápoja, odlejeme a prilejeme x litrov vody (je jasné, že x litrov nemôže byť viac než 1 liter, takže si pod x predstavme zlomok alebo desatinné číslo s hodnotou najviac 1). Dostali sme teda 1-litrovú zmes, z ktorej $(1-x)$ litrov tvorí čarovný nápoj a x litrov tvorí voda. Inak povedané, podiel čarovného nápoja v tekutine je $1-x$ ku 1, a podiel vody v tekutine je x ku 1.

Teraz znova odoberieme x litrov tekutiny z nádoby. Z tejto odobranej tekutiny bude práve $(1-x)\cdot x$ čarovného nápoja, pretože o odobraných x litroch tekutiny môžeme povedať, že nich $1-x$ tvorí čarovný nápoj (predstavte si namiesto x konkrétny zlomok, napr. $\frac{1}{4}$. Takže keď $\frac{3}{4}$ tekutiny tvorí čarovný nápoj, v odobranej $\frac{1}{4}$ tekutiny budú $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ čarovného nápoja). Teda v nádobe musel ostať zbytok, t.j. $(1-x)-x(1-x)=(1-x)^2$ čarovného nápoja.

Podobne s druhou nádobou: Po prvom odlievaní $2x$ litrov tekutiny a následnom priliatí vody bude čarovného nápoja v nádobe $(1-2x)$, keď odlejeme druhýkrát $2x$ litrov, tak v $2x$ litroch tekutiny bude $(1-2x)\cdot 2x$ čarovného nápoja. Takže v nádobe ostalo $(1-2x)-2x(1-2x)=(1-2x)^2$ čarovného nápoja.

Zo zadania vieme, že po odlievaní je pomer čarovného nápoja v prvej nádobe k čarovnému nápoju v druhej nádobe $\frac{25}{16}$. Teda:

$$\frac{(1-x)^2}{(1-2x)^2}=\frac{25}{16}$$

Odmocníme. Ale POZOR!!!! Keď niečo odmocňujete, tak sa musíte pozrieť na to, či sú obe strany nezáporné. A keďže na ľavej strane nemôže po odlievaní ostať v čitateli ani v menovateli záporný počet litrov, ľavá strana je kladná. Pravá takisto. A preto môžeme odmocňovať:

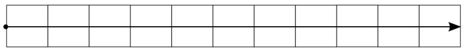
$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1-2x}&=\frac{5}{4}\\ 4\cdot(1-x)&=5\cdot(1-2x)\\ 4-4x&=5-10x\\ x&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Odpoveď: Teda x litrov predstavuje $\frac{1}{6}$ litra.

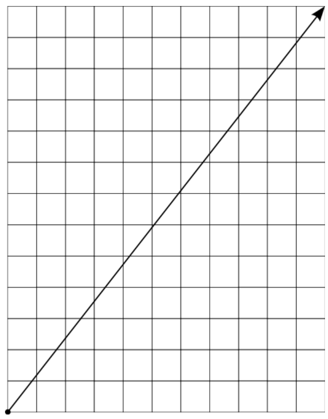
Komentár: Veľa z vás robilo chybu práve pri tom odmocňovaní. Proste ste to odmocnili a vôbec ste sa nad tým nezamýšľali. Tam som strhla 1 bodík. Ostatní ste to mali na plný počet bodov. Chválim vás za znalosti chémie a kvadratickej rovnice. Ste skvelí. Len tak ďalej :).

Príklad č. 8 (opravoval etome):

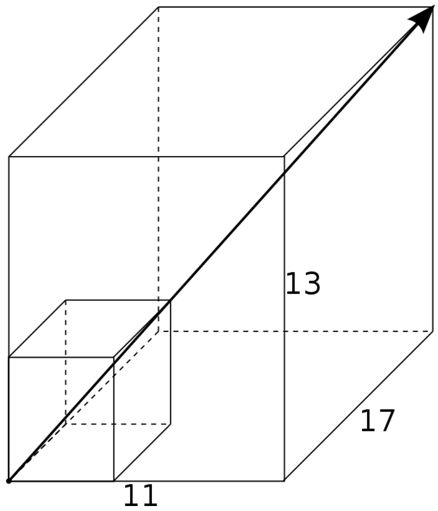
A (okrem Gamče): Predstavme si, že by sme mali 11 kociek postavených v rade vedľa seba (obrázok 11, pohľad spredu) a chceli by sme zistiť, cez koľko kociek prejde trubička, ktorá ide z jedného konca radu kociek na druhý. Táto trubička začína v prvej kocke, takže ju pretína, a 10-krát prejde do nejakej ďalšej kocky.



Obrázok 11: 11 kociek v rade



Obrázok 12: pohľad na stenu z kociek



Obrázok 13: kváder s menším kvádrom

Podobne, keby sme mali kociek nie 11, ale 13, tak by trubička začínala v prvej kocke a musela by prejsť 12-krát do ďalšej.

A čo keby sme mali stenu z kociek 11×13 (obrázok 12, pohľad spredu) a pozerali by sme sa na trubičku, ako prechádza stenou z ľavého dolného konca steny do pravého horného konca? Vo vodorovnom smere prejde 10-krát do novej kocky a vo zvislom (smerom hore) 12-krát do novej kocky. Takže by to mohlo znamenať, že trubička prejde prvou kockou a potom prejde do $10+12$ kociek, čize celkovo prejde cez 23 kociek. Ale bude to skutočne takto? Kedy by sa nám to mohlo pokaziť?

My rátame prechody do kociek doprava a hore zvlášť. Ale, môže sa nám stať, že trubička prejde naraz do „pravej“ aj do „hornej“ kocky? Teda že prejde vlastne hranou (na obrázku je to roh štvorca) a dostane sa tak do kocky, ktorá je vo vyššom rade a vo vedľajšom stĺpci? Ak by sa toto stalo, tak v našom výsledku by sme mali za každú takúto „udalosť“ kocku naviac.

Dobre, a teda môže takéto niečo nastať v našom prípade? Trojuholník, ktorý trubička na stene vytvorí, je pravouhlý a má pomer odvesien $11 : 13$. Ak sa počas „prechodu“ trubičky spýtame, ako vysoko bude trubička, ak bude o x kociek ďalej od začiatku vo vodorovnom smere, vieme to z podobnosti trojuholníkov vypočítať. Jej výšku si označíme y. Potom musí platiť $x : y = 11 : 13$, a teda $y = \frac{13}{11} \cdot x$. Keďže $x \leq 11$ je s jedenástkou v menovateli súdeliteľné len vtedy, keď sa rovná 11. Teda len v prípade $x = 11$ (a teda $y = 13$) sú x aj y celočíselné a trubička prejde hranou kocky (rohom štvorca na obrázku). A to je úplne na konci, teda sa nám to nikde nekazí.

Dobre, tak tomu dajme ešte jeden nový rozmer...

Ak máme ten náš kváder $11 \times 13 \times 17$ (obrázok 13) a začíname v prvej kocke, tak: v smere doprava prejdeme 10-krát do ďalšej kocky, v smere hore 12-krát, a v smere dozadu 16-krát. Takže výsledok bude $1 + 10 + 12 + 16 = 39$, ale jedine ak trubička nebude prechádzať cez žiadny roh ani hranu kocky!

Ako sme to pre 11 a 13 skúšali, len kvôli nesúdeliteľnosti 11 a 13 sa nám to darilo, takisto aj pri 11 a 17, a 13 a 17 sa nám to darí, lebo aj tieto čísla sú nesúdeliteľné. Je pravda, že tentoraz už nie sme len v jednej rovine (v jednej stene) ako predtým, ale pri pohľade na celý kváder spredu vidíme situáciu rovnako, ako na obrázku 12. Analogicky aj pri pohľadoch zboku a zvrchu. Na zistenie, či trubička prechádza hranou, môžeme tretí rozmer pokojne zanedbať, pretože už pri týchto pohľadoch „zo strán“ by sme si všimli, že by trubička cez hranu prechádzala. Takže cez hrany kociek nám trubička neprechádza. A čo cez rohy kociek?

Intuitívne, keď trubička neprechádza cez hrany kociek, nemôže prechádzať ani cez rohy kociek (pretože roh predstavuje stretnutie dvoch hrán). Pokiaľ ale neveríte, môžete si to overiť:

Ak si predstavíme prechod trubičky, tak pomer vzdialeností: od začiatku v smere doprava, od začiatku v smere nahor a od začiatku smerom dozadu, je stále rovnaký ako pomer strán veľkeho kvádra, teda $11 : 13 : 17$. Okolo prechádzajúcej trubičky si môžeme predstaviť kváder tak, že jeho steny budú rovnobežné so stenami veľkého kvádra a pomery strán budú zachované. A teda, ak by mala trubička prechádzať nejakým rohom kocky, tak by tento menší kváder musel mať celočíselné rozmery.

Malý kváder má ale pomer strán $x : y : z$ rovnaký ako veľký kváder, $11 : 13 : 17$ čo je vlastne to isté ako zápis $x : y = 11 : 13$, $y : z = 13 : 17$, $z : x = 17 : 11$. A vieme, že kvôli nesúdeliteľnosti 11, 13 a 17 nevieme nájsť vhodné celé čísla (rôzne od $11, 13, 17$) ani pre jeden z týchto pomerov. Taký kváder s celočíselnými rozmermi neexistuje.

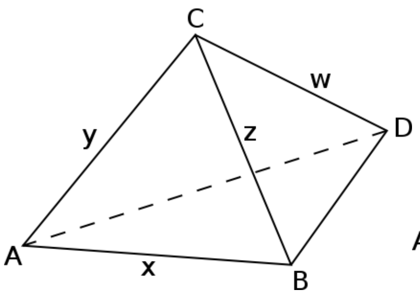
Teda ani cez žiadny roh kocky, ani cez žiadnu hranu kocky nám to neprechádza. Nemáme žiadnu kocku zarátanú viackrát.

Odpoveď: Trubička „zasiahla“ 39 kociek.

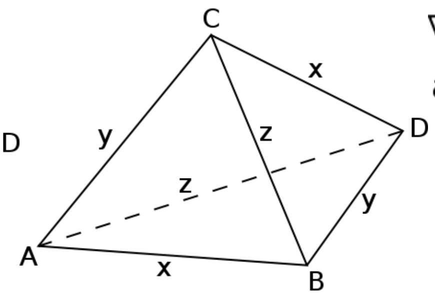
Komentár: Tento príklad ste poslali len dvaja. Bol taký nie veľmi ľahký. Nabudúce takýto už ale vedieť budete.

B (pre Gamču): Označme si tri hrany na jednej stene ako x, y, z a ešte jednu w, ako je na obrázku 14. Zvyšné hrany zatiaľ nechajme neoznačené.

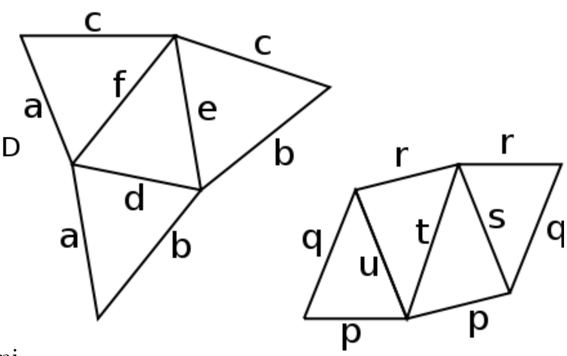
Obvod každej steny je podľa zadania rovnaký, takže keď má stena ABC obvod $x + y + z$, aj ostatné steny majú taký obvod. Vďaka tomu si vieme hrany BD a AD vyjadriť pomocou ostatných dĺžok. Ak dáme do rovnosti obvod steny ABC a BDC,



Obrázok 14: štvorsten



Obrázok 15: štvorsten s rovnakými hranami



Obrázok 16: možné plášte štvorstena všeobecne

resp. ABC a ADC, dostávame:

$$|BD| = (x + y + z) - (z + w) = x + y - w$$
$$|AD| = (x + y + z) - (y + w) = x + z - w$$

A keďže aj na stene ABD musí platiť, že obvod je $x + y + z$ môžeme napísať:

$$\begin{aligned} x + y + z &= x + (x + y - w) + (x + z - w) \\ 0 &= 2x - 2w \\ x &= w \end{aligned}$$

Potom $|BD| = x + y - x = y$ a $|AD| = x + z - x = z$. Protiľahlé hrany sú vždy rovnako dlhé (obrázok 15) a dĺžky týchto dvojíc sú: x, y a z.

Pokojne si môžeme určiť že

$$x \leq y \leq z \tag{1}$$

Je to v poriadku, lebo štvorsten sme si mohli označiť ako sa nám zachcelo.

A teraz, ako môže vyzerať sieť? Sieť je plášť štvorstena, ktorý je rozbalený do roviny. To vieme spraviť niekoľkými spôsobmi (napr. obrázok 16). Sieť sú len 4 trojuholniky/steny spojené tromi stranami. A teda vnútri siete sú tri hrany a na obvode ďalšie tri, ale každá dvakrát (môžeme si to predstaviť: jedna a druhá, ktorá sa k nej pripája, ak by sme štvorsten skladali zo siete naspäť).

Chceme nájsť minimálny obvod siete, teda by sme chceli, aby na obvode siete boli tie najmenšie strany. Konkrétne, keďže z každej dĺžky máme dve, tak tie dve najkratšie (x) a jedna druhá najkratšia (y). To vieme docieliť správnym výberom siete. Sieť podobného typu ako je prvá sieť na obrázku 16 by mala na obvode hrany dĺžok x, y, z každú dvakrát. Ale druhá sieť na obrázku už môže mať spomínané rozloženie hrán.

Najmenší obvod zo strán x, x a y na obvode bude

$$28 = 2x + 2x + 2y = 4x + 2y \tag{2}$$

Teraz máme tri možnosti, ktoré z x, y, z môžu byť 2 a 6 (pre jednoduchosť nepíšeme v celom vzorovom riešení centimetre).

Prvá možnosť je $x = 2$, $y = 6$. Potom minimálny obvod bude

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 20$$

čo je menej ako 28, teda takýto štvorsten nevyhovuje.

Druhá možnosť je $x = 2$, $z = 6$. Tu pre minimálny obvod platí

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 2y &= 28 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Ale to nám nesedí s podmienkou (1), ktorú sme si stanovili. A pretože v tomto usporiadaní je y najväčšie, neplatí ani, že obvod 28 je najmenší možný (minimálny by bol opäť $4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 20$). A navyše, trojuholník so stranami 2, 6, 10 neexistuje (to vidíme z trojuholníkovej nerovnosti).

Tretia možnosť je $y = 2$, $z = 6$. A najmenší obvod by mal byť

$$\begin{aligned} 4x + 2 \cdot 2 &= 28 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

A tu nám opäť neplatí naša podmienka (1). Preto by 28 nemohol byť minimálny obvod ako chceme v zadaní, ale bol by to opäť $4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 20$.

Odpoveď: Žiadna z možných možností nám nevyšla, preto taký štvorsten, aký hľadáme neexistuje.

Komentár: Veľa z vás si neuvedomilo, že existujú aj iné siete štvorstena. A tiež veľa z vás skúšala 2 a 6 priradiť niektorým stranám, ale neskúsili ste obe možnosti. Koniec koncov, bol to celkom ťažký príklad.

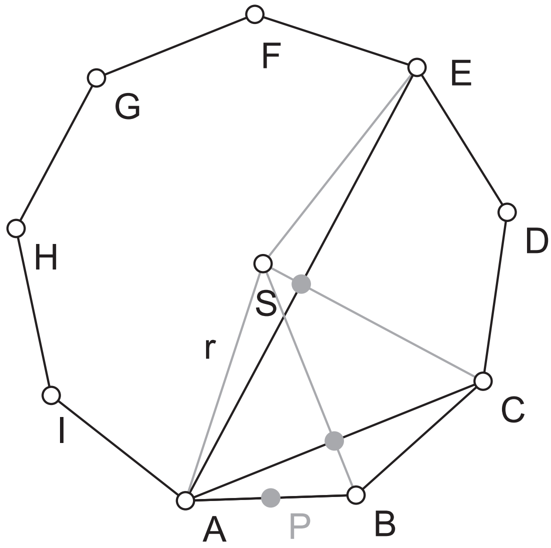
Príklad č. 9 (opravovali Natali, Palo):

Najprv si nakreslime obrázok:

Ako sa často stáva, aj tento príklad sa dal vyriešiť mnohými spôsobmi. Tu si ukážeme aspoň dva z nich.

Prvý postup je menej elegantný, no je, samozrejme, správny. Spočíva v tom, že si potrebné dĺžky úsečiek vyjadríme pomocou goniometrických funkcií a potom ich porovnáme. Tak sa do toho pustíme.

Pozrime sa na rovnoramenný trojuholník ABS a pravouhlý trojuholník APS, ktorý vznikne nakreslením výšky (a zároveň ťažnice) na stranu AB. Keďže je plný uhol pri strede S rozdelený na 9 rovnakých častí, platí $|\sphericalangle ASB| = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Keďže je tento trojuholník rovnoramenný, musia byť uhly pri základni zhodné. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle ABS| = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Teraz sa zamerajme na trojuholník APS. Kosínus uhla pri vrchole A si vieme vyjadriť nasledovne: $\cos(|\sphericalangle SAP|) = \frac{|AP|}{|AS|}$. Keďže je PS výškou aj ťažnicou trojuholníka ABS, bod P je stredom strany AB. Dĺžku AS si označme r – je to polomer opísanej kružnice nášmu pravidelnému 9-uholníku. Upravme si vzťah pre dĺžku AB:



Obrázok 17: 9-uholník

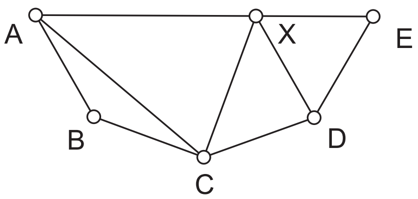
$$\cos(|\sphericalangle SAB|) = \frac{\frac{|AB|}{2}}{r} \Rightarrow |AB| = 2r\cos(|\sphericalangle SAB|) = 2r\cos 70^\circ$$

Presne rovnakým spôsobom si vieme odvodiť vzťahy pre dĺžky úsečiek AC a AE – z trojuholníkov ACS a AES. Po dosadení dostávame:

$$|AC| = 2r\cos 50^\circ$$
$$|AE| = 2r\cos 10^\circ$$

Poďme overiť, či platí rovnosť $|AB| + |AC| = |AE|$, ktorú máme dokázať:

$$2r\cos 70^\circ + 2r\cos 50^\circ = 2r\cos 10^\circ$$
$$2r(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) = 2r\cos 10^\circ$$
$$\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ$$



Obrázok 18: Výrez z 9-uholníka

To si napíšeme do kalkulačky a tá nám vyhodí, že táto rovnosť naozaj platí, čiže platí aj pôvodná rovnosť $|AB| + |AC| = |AE|$. Rovnica s kosínusmi sa dá dokázať aj iným spôsobom, ako vypočítaním v kalkulačke, no to sme od vás zatiaľ nechceli. Tým je dôkaz skončený.

Chceme vás ale upozorniť na dôležitú vec. Kalkulačka môže vyhodiť, že dve čísla sú rovnaké, to však neznamená, že je to aj pravda. Ona si to len myslí, pretože má veľmi obmedzenú presnosť (ľahko ju oklameme, že napr. číslo 3,14159265 je π, ale my vieme pravdu, že sa líšia ešte vo veľmi veľa cifrách). A presnosť je dnes veľmi dôležitá vlastnosť. Preto úloha – nájsť *presné* číslo – ostáva naďalej na nás, matematikoch (všetkého druhu).

Druhý postup, omnoho elegantnejší a hlavne presnejší (podľa Maťa Kimerlinga). Najprv si nakreslíme obrázok, na ktorom je výrez z nášho 9-uholníka:

Bod X sme si zvolili tak, aby platilo $|XE| = |DE| = |AB|$, keďže sú všetky strany pravidelného 9-uholníka rovnako dlhé. Keby sme dokázali, že $|AC| = |AX|$, mali by sme dokázané, že $|AB| + |AC| = |AE|$. Inak povedané, keď dokážeme, že je trojuholník ACX rovnoramenný so základňou CX, máme dokázanú pôvodnú rovnosť. Skúsme si teda dopočítať veľkosti uhlov na obrázku.

Vnútorný uhol v 9-uholníku má veľkosť 140°. To znamená, že zvyšné dva vnútorné uhly trojuholníka ABC majú $\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$. Súčet vnútorných uhlov v 5-uholníku $ABCDE$ (a aj každom inom) je 540°. Tri z vnútorných uhlov tohoto útvaru majú 140° (pretože sú vnútornými uhlami pôvodného 9-uholníka). Zvyšné dva uhly sú zjavne rovnaké, čiže ich veľkosť je $\frac{540^\circ - 3\cdot 140^\circ}{2} = 60^\circ$. Z toho vyplýva, že trojuholník XDE je rovnostranný - podľa vety `sus`. Zároveň platí, že

$$|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle BAX| - |\sphericalangle BAC| = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

Trojuholník CDX je rovnoramenný so základňou CX – platí $|CD| = |DE| = |DX|$. O uhle CDX platí

$$|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CDE| - |\sphericalangle XDE| = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

Keďže je uhol CDX uhlom oproti základni v rovnoramennom trojuholníku, majú zvyšné dva uhly v trojuholníku veľkosť $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$. Teraz si už vieme vyjadriť veľkosti uhlov pri základni v rovnoramennom trojuholníku ACX:

$$|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle AXE| - |\sphericalangle DXE| - |\sphericalangle CXD| = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$
$$|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle XCD| = 140^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

Zistili sme, že $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle ACX|$, čiže trojuholník ACX je rovnoramenný, a teda platí $|AB| + |AC| = |AE|$, čo bolo treba dokázať.
Komentár: Tento príklad dopadol väčšinou veľmi dobre, našli ste veľa rôznych spôsobov ako ho vyriešiť. Body sme strhávali hlavne za nie úplne dobré vysvetlenia krokov, ale zase až tak veľa toho na strhávanie nebolo. Na jednu vec vás ale musíme upozorniť... Chytiť pravítko a odmerať nie je tá najlepšia cesta k desiatim bodom, naozaj to nie je dostatočný dôkaz, že dané dĺžky sú rovnaké... Ale inak si myslíme, že vám tento príklad naozaj vyšiel, len tak ďalej. A špeciálna pochvala patrí Martinovi Kimerlingovi za uplne krásne elegantné riešenie.

Prémia (opravoval Emil):

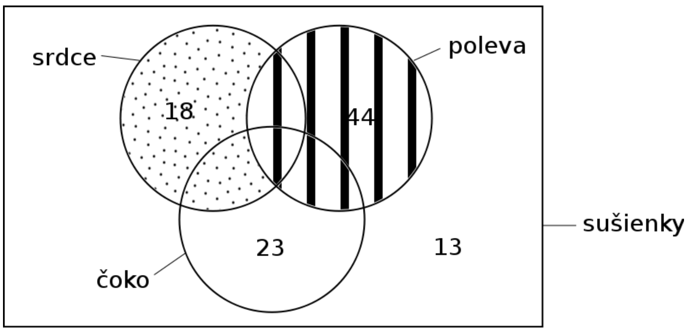
Zadanie: V krabici s 98 sušienkami je 50 čokoládových, 26 srdiečkových a 44 s polevou. Vieme, že:

- 13 sušienok nie je ani čokoládových, ani srdiečkových a nemá ani polevu
- 18 ich je srdiečkových, ale nemajú polevu, a možno niektoré majú čokoládovú príchuť
- 19 ich má polevu ale nie sú srdiečkové ani čokoládové
- 20 ich je čokoládových s polevou a možno sú niektoré srdiečkového tvaru

Koľko je čokoládových sušienok, ktoré nemajú polevu ani srdiečkový tvar?

Riešenie: Príklad ste riešili viacerými spôsobmi. Väčšina z vás vypočítala počty sušienok každého typu. To ste však nemuseli robiť, keďže na zistenie koľko sušienok je čokoládových bez polevy a tvaru srdiečka stačilo takéto riešenie:

Všetkých sušienok je 98, z toho 13 nie je ani čokoládových, ani srdiečkových a nemá ani polevu. Takých, ktoré majú aspoň jednu z týchto vlastností je teda $98 - 13 = 85$. Z nich 44 má polevu. To znamená, že takých sušienok, ktoré sú čokoládové alebo tvaru srdiečka (alebo aj čoko aj srdce), ale nemajú polevu je $85 - 44 = 41$. Ďalej vieme, že sušienok tvaru srdiečka, ale bez polevy je 18. Čokoládových sušienok, ktoré nemajú polevu ani tvar srdiečka, je teda $41 - 18 = 23$. Nakoniec si nakreslíme obrázok, na ktorom je vidno, že z celkového počtu sušienok (98) sme naozaj postupne odčítali všetky okrem tých, čo sú iba čokoládové.



Obrázok 19: rozdelenie sušienok

Odpoveď: Čokoládových sušienok, ktoré nemajú polevu ani srdiečkový tvar je 23.
Komentár: Väčšina z vás to mala správne, niektorým som musel strhnúť bod za malú chybu. Tí, ktorí napísali iba rozlúštené zadanie, dostali 0 bodov.