R I E Š K Y

matematický korešpondenčný seminár

10. ročník, 2007/2008

Milé naše Rieškarky, Rieškari a aj Rieškarčiatka,

Ďalšia séria je za nami, ďalšie príklady sú vypočítané, ďalšie riešenia opravené. Sústredenie sa pomaly, ale iste, dostáva do stavu príprav. Vaši vedúci sa začínajú stresovať kvôli skúškam na vysokej, maturitám na strednej, či proste písomkám na konci roku, tak ako vy. Ale vonku je pekne, tak prečo si kaziť náladu? To radšej vyraziť niekam do prírody, do Medickej, do Sadu, do mesta alebo do lesa.

Počasie sa tvári ešte aprílovo, aj keď už je máj, preto nieže nám ochoriete z toho, že zmoknete! Netreba sa nechať odradiť, veď aj vyvenčiť sa občas treba… Vonku to hýri farbami ako v šatníku niektorých ľudí, čo poznám, kvietočky nechýbajú na každom kroku. O festivaly nie je núdza, veď len teraz, začiatkom mája, bol prvý majáles, Račianske vinobranie, a ďalšie festivaly budú nasledovať. Obloha sa snáď tiež umúdri, takže hor' sa von za zábavou.

Blíži sa leto, kúpanie, výlety, prázdniny a zábava. Kto z vás už vie, čo bude robiť? Lebo ja ešte nie. Najradšej by som sa rozkrájala, na koľkých miestach by som chcela byť naraz. Dúfam, že vám sa nič také nestane. A keby ste mali pocit, že vám chýba spoločenská komunikácia s Rieškarmi, tak neváhajte a príďte na IRC kanál Riešok. Prihlásiť sa dá aj cez internet, cez webrozhranie, ktoré je na `http://riesky.sk/irc`. Čaká vás veľa rečí o zaujímavých témach… Teraz vás už ale nechám venovať sa riešeniam, vzorákom a bodom. Ale nepreháňajte to…

Pekné-týždne-a-počasie-vám-želajúca-a-zo-slniečka-sa-tešiaca Allie

A ešte ja čosi pridám, určite si prečítajte vzorák príkladu 7. A všimnite si, ako zaujímavo sa úloha „ukážte, že *niečo* existuje" rieši. Najmä ten postup, „skúsme to tak, že *niečo* neexistuje" a potom vyjde „akokoľvek sa snažíme, aby to neexistovalo, aj tak musí to *niečo* existovať". No, proste, stojí za to, prečítať si ho aj dva-tri krát.

aNTI

Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2007/2008

Príklad č. 1 (opravovala Zuzka):

Chceme dosiahnuť to, aby všetky zelené draky zmizli a na ostrove zostali len modré. Keďže je zelených drakov viac ako modrých, k stretnutiu piatich zelených a troch modrých drakov musí dôjsť častejšie ako k stretnutiu troch zelených a piatich modrých drakov. Čiže chceme dosiahnuť, aby celkový počet zelených drakov, ktoré zmizli, bol väčší ako počet zmiznutých modrých drakov.

Koľko najviac stretnutí piatich zelených a troch modrých drakov môže nastať? $113 : 5 = 22, \text{zv } 3$ Takže môže nastať 22 takýchto stretnutí a ešte ostanú tri zelené draky. A tie môžu presne zmiznúť pri stretnutí troch zelených a piatich modrých drakov. Takže koľko modrých drakov napokon ostane (po 22 stretnutiach piatich zelených a troch modrých drakov a po jednom stretnutí troch zelených a piatich modrých)?

Predsa $103 - 22 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 103 - 66 - 5 = 32$ Takže sme našli jedno riešenie: Na ostrove môže zostať 32 modrých drakov. No sú ešte ďalšie riešenia? Skúsme zmenšiť počet stretnutí piatich zelených a troch modrých drakov. Ďalšie výpočty už budem zapisovať do tabuľky (Tabuľka 1).

Prvý stĺpec udáva počet stretnutí 5 zelených a 3 modrých drakov, ktorý budem postupne znižovať. Druhý stĺpec udáva potrebný počet stretnutí 3 zelených a 5 modrých drakov, aby na ostrove nezostali žiadne zelené draky. Posledný stĺpec udáva počet modrých drakov, ktoré na ostrove zostanú, keď zmiznú všetky zelené.

Ďalej už skúšať netreba, lebo modré draky by určite vymizli skôr ako zelené.

Odpoveď: Na ostrove môžu ostať len modré draky. Môže ich zostať 32 alebo 16.

Komentár: Tento príklad ste naozaj pekne zvládli, veď nebol ani ťažký. Takmer každý dostal plný počet bodov. Potešilo ma i to, že sa niektorí neuspokojili len s nájdením jedného riešenia, ale našli obe a ukázali, že už iné neexistujú.

5 zelených a 3 modré	3 zelené a 5 modrých	počet modrých, ktoré zostanú
21	$(113 - 21 \cdot 5) : 3 = 8 : 3$ nie je celé číslo nenastane zmiznutie všetkých zelených drakov	—
20	$(113 - 20 \cdot 5) : 3 = 13 : 3$ nie je celé číslo nenastane zmiznutie všetkých zelených drakov	—
19	$(113 - 19 \cdot 5) : 3 = 18 : 3 = 6$	$103 - 19 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = 16$
18	$(113 - 18 \cdot 5) : 3 = 23 : 3$ nie je celé číslo nenastane zmiznutie všetkých zelených drakov	—
17	$(113 - 17 \cdot 5) : 3 = 28 : 3$ nie je celé číslo nenastane zmiznutie všetkých zelených drakov	—
16	$(113 - 16 \cdot 5) : 3 = 33 : 3 = 11$	$103 - 16 \cdot 3 - 11 \cdot 5 = 0$ na ostrove nezostali už žiadne draky

Tabuľka 1: Postupné výpočty

Príklad č. 2 (opravovali Natali, Miška, Tinka):

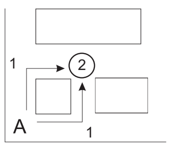
Miška odlomila vždy iba jeden celý riadok alebo jeden stĺpec. Ak by sme chceli odlomiť 2 riadky, alebo 2 stĺpce za sebou, obidva by vážili rovnako. Úlomky však vážili postupne 36 gramov, 18 gramov a 30 gramov. To znamená, že Miška z čokolády odlamovala striedavo riadky a stĺpce. Je jedno čo označujeme ako riadky a čo ako stĺpce (zameníme jednoducho otočením čokolády o 90°). Takže prvý odlomila riadok, ktorý vážil 36 g, druhý odlomila stĺpec, ktorý vážil 18 g a potom zase riadok, ktorý vážil 30 g. Prvé a tretie lámanie boli riadky, ale pri treťom bol už riadok o jednu tabličku kratší, a to kvôli druhému lámaniu. 36-gramový úlomok mal teda o jednu tabličku viac ako 30-gramový, takže jedna tablička váži $36\,\mathrm{g} - 30\,\mathrm{g} = 6\,\mathrm{g}$. Z toho vyplýva, že prvý úlomok obsahoval $36\,\mathrm{g} : 6\,\mathrm{g} = 6$ tabličiek, čo je šírka pôvodnej čokolády. Druhý úlomok obsahoval $18\,\mathrm{g} : 6\,\mathrm{g} = 3$ tabličky, ale oproti pôvodnej veľkosti čokolády bol už kvôli prvému lámaniu o 1 tabličku kratší, čiže dĺžka pôvodnej čokolády bola $3 + 1 = 4$ tabličky. Celá čokoláda mala teda $6 \times 4 = 24$ tabličiek, z ktorých každá vážila 6 g. Hmotnosť celej čokolády teda bola $24 \cdot 6\,\mathrm{g} = 144\,\mathrm{g}$.

Odpoveď: Celá čokoláda vážila 144 gramov.

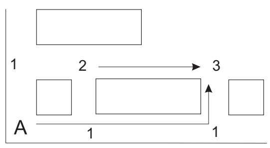
Komentár: Väčšina z vás mala výsledok správny, body sme strhávali hlavne za nedostatočné vysvetlenia v postupe, napríklad, prečo sa lámanie strieda v riadkoch a stĺpcoch. Alebo ste vôbec nezdôvodnili prečo váži jedna tablička 6 gramov. Ale celkovo ste to zvládli pekne :).

Príklad č. 3 (opravoval Jakuub):

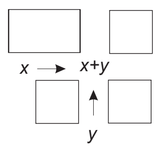
Bolo by najlepšie, keby sme počet ciest vedeli nejako šikovne vypočítať. Skúsme si teda od začiatku všímať cestu a hlavne, koľkými spôsobmi sa môžeme kam dostať.



Obrázok 1: Začiatok cesty



Obrázok 2: Pokračovanie



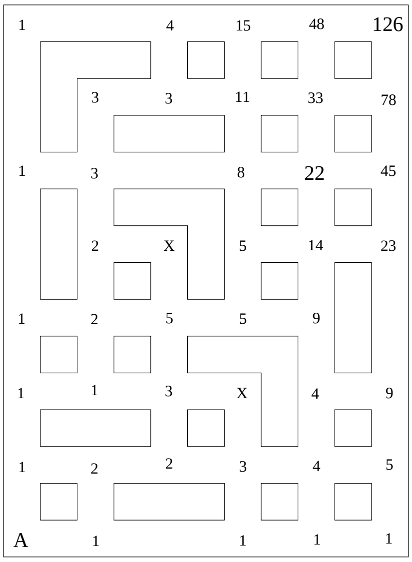
Obrázok 3: Úvaha

Z bodu A môžeme ísť na sever alebo na východ. Cestou na sever dojdeme k prvej križovatke, na ktorú sa dá dostať len touto jedinou cestou. To isté platí aj o prvej križovatke cestou na východ. Avšak, na vyznačené miesto severovýchodne od bodu A (obrázok 1) sa už vieme dostať dvoma spôsobmi, teda z oboch spomínaných križovatiek. Ak by sme pokračovali ďalej (povedzme na východ), rovnako by sme zistili, že priamou cestou popri okraji sa dostaneme ku križovatke, ku ktorej vedie tiež len táto jediná cesta. Ale na miesto severne od nej už vedú tri rôzne vyznačené cesty, z toho dve zo západu a jedna z juhu (obrázok 2). Takto si vytvoríme úvahu, ktorá nám pomôže príklad vypočítať:

Zoberme si nejakú križovatku. V zadaní je, že sa môžeme pohybovať len na sever alebo na východ – preto na našu križovatku môžeme prísť len z juhu alebo zo západu. Úvaha: Ak sa na križovatku, ktorá je najbližšie na juh od našej križovatky, dá prísť x rôznymi cestami a na križovatku, ktorá je na západ od našej y rôznymi cestami, tak na našu sa dá prísť $x + y$ rôznymi cestami, lebo žiadne cesty z y nie sú totožné s tými z x (obrázok 3).

Takto vieme načrtnúť celú sieť mesta. Stačí len vedieť, že na prvé križovatky hneď vedľa A sa dá dostať len jednou cestou. Všetky ostatné čísla z toho dopočítame. Spomínaný náčrt je na obrázku 4.

A ešte malá poznámka k obrázku: X je na mieste, z ktorého sa nedá dostať. Museli by sme ísť na juh alebo na západ. Cez toto miesto Mačka nepôjde, lebo by sa nikam nedostala.



Obrázok 4: Mesto

Odpoveď: Do B sa dá teda dostať 22 a do C 126 rôznymi cestami.
Komentár: Veľa z vás malo správne riešenie. Body sme strhávali za to, keď ste nepopísali dostatočne tento postup, alebo ak ste vypisovali všetky možnosti a nemali ste ich všetky, alebo nebol vidieť jasný systém, čiže nebolo vidieť, že sú to všetky možnosti. Bolo aj zopár riešení, ktoré vyzerali len ako výsledok a to je všetko. V takých riešeniach sme sa snažili nájsť aspoň náznak postupu.

Príklad č. 4 (opravovali Jankaa, Pištík, Monika, Peťo):

Zadanie:

1. V tíme je 5 hráčov.
2. V tíme sú tri dievčatá a dvaja chlapci.
3. Dvaja majú oblečené biele tričká a traja čierne.
4. Miki a Alex majú oblečené tričká rôznych farieb.
5. Bari a Jamie majú oblečené tričko rovnakej farby.
6. Pita a Alex sú rovnakého pohlavia.
7. Jamie a Miki sú rôzneho pohlavia.
8. Chlapec v bielom tričku dal najviac bodov.

Kto bol najlepším strelcom?
Riešenie: Podľa (5) majú Bari a Jamie tričká rovnakej farby a podľa (4) majú Miki a Alex oblečené tričká rôznych farieb. Takže Bari, Jamie a Miki alebo Bari, Jamie a Alex musia mať tričká rovnakej farby. Keďže podľa (3) biele tričká sú len dve, trojica musí mať čierne tričká. V trojici iste sú Bari a Jamie, takže Bari a Jamie majú určite čierne tričká.

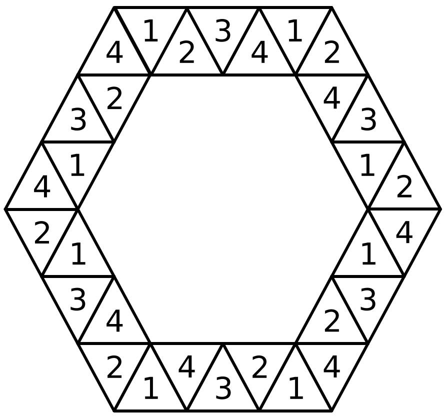
Podľa (6) majú Pita a Alex to isté pohlavie a podľa (7) Jamie a Miki rôzne pohlavie. Takže Pita, Alex a Jamie alebo Pita, Alex a Miki musia mať rovnaké pohlavie. Keďže podľa (2) sú v tíme len dvaja chlapci, Pita a Alex musia byť dievčatá.

	Miki	Alex	Bari	Jamie	Pita
tričká			čierne	čierne	
pohlavie		dievča			dievča

Podľa (8) vieme, že najlepší strelec bol chlapec oblečený v bielom tričku. V tabuľke vidíme, že obidve podmienky zároveň môžu byť splnené len pre Mikiho, nakoľko Bari a Jamie majú tričká čierne a Pita a Alex sú dievčatá.
Odpoveď: Najlepším strelcom bol Miki.
Komentár: Boli ste naozaj veľmi šikovní. Padali skoro samé desiatky. Problém bol jedine v tom, že ste občas svoje riešenia nedostatočne vysvetlili. Za takéto menšie nepresnosti v postupe sme vám strhávali 1–2 body. Za závažnejšie chyby vo vašom riešení išli prirodzene dole aj ďalšie body. Veríme, že nabudúce bude desiatok ešte viac.

Príklad č. 5 (opravovali Emil, Marta):

Prvé čo potrebujeme zistiť je informácia o tom, ako sa štvorsten prevaľoval po pláne, presnejšie, koľkokrát sa ktorá stena dotkla plánu. Aby sme mali istotu, že sa nepomýlime, zostrojíme si štvorsten (väčšina z vás ho vyrobila z plastelíny) a označíme si jeho steny (napr. číslami od 1 po 4). Potom ho budeme kotúľať po pláne a na každej jeho pozícii si značiť, ktorá stena sa dotkla plánu. Takto získame plánik s číslami. Keď spočítame, koľkokrát sa na pláiku vyskytujú jednotlivé čísla, zistíme, ktorá stena sa koľkokrát dotkla pláiku. Zistili sme, že stena s číslom 1 sa nachádza na pláiku 8-krát, rovnako ako stena č.2 a č.4.



Obrázok 5: plánik s číslami stien, ktoré sa ho dotkli

Stena č.3 sa tam nachádza 6-krát. Hodnoty, ktoré budú napísané na stenách č.1, č.2, č.3 a č.4 si zatiaľ označíme písmenami A, B, C a D. Môžu to byť čísla od 1 do 9, pričom sa nesmú navzájom rovnať. Potom vieme, že platí:

$$\begin{aligned} 8 \cdot A + 8 \cdot B + 8 \cdot D + 6 \cdot C &= 222 \\ 8 \cdot (A + B + D) + 6 \cdot C &= 222 \\ 4 \cdot (A + B + D) + 3 \cdot C &= 111 \\ 4 \cdot (A + B + D) &= (111 - 3 \cdot C) \\ A + B + C &= \frac{111 - 3 \cdot C}{4} \end{aligned}$$

Teraz už vieme, že $111 - 3 \cdot C$ musí byť deliteľné 4, pretože súčet $A + B + C$ je určite celočíselný. Za C budeme teda dosadzovať čísla od 1 po 9 a zisťovať či je $\frac{111-3\cdot C}{4}$ celé číslo:

$$\frac{111 - 3 \cdot 1}{4} = 27 \qquad \frac{111 - 3 \cdot 6}{4} = 23,25$$
$$\frac{111 - 3 \cdot 2}{4} = 26,25 \qquad \frac{111 - 3 \cdot 7}{4} = 22,5$$
$$\frac{111 - 3 \cdot 3}{4} = 25,5 \qquad \frac{111 - 3 \cdot 8}{4} = 21,75$$
$$\frac{111 - 3 \cdot 4}{4} = 24,75 \qquad \frac{111 - 3 \cdot 9}{4} = 21$$
$$\frac{111 - 3 \cdot 5}{4} = 24$$

Celočíselné výsledky sme dostali iba pre $C = 1$, 5 resp. 9. Pre každú z možných hodnôt C teraz potrebujeme nájsť 3 rozdielne čísla, ktorých súčet bude rovný $\frac{111-3\cdot C}{4}$. Číslo 27 splnením podmienok (čísla sú jednociferné a rôzne) nevieme dostať, Najväčšie tri jednociferné čísla sú totiž 9, 8 a 7 a ich súčet je iba 24. Číslo 24 teda viem získať iba súčtom $7 + 8 + 9$ a to vyhovuje, pretože číslo C je v tomto prípade 5, takže sa čísla neopakujú. Pri čísle 21 si musíme dať pozor, aby sme nepoužili deviatku, pretože C sa v tomto prípade rovná 9. V takomto prípade máme už iba jednu možnosť, ako získať súčet 21 a to $8 + 7 + 6$.
Takže príklad má 2 riešenia.
Odpoveď: Steny mohli byť popísané číslami 5,7,8,9 alebo 6,7,8,9.
Komentár: Väčšina z vás mala správne obe riešenia. Body sme však často strhávali za nedostatočný postup, pretože viacerí nenapísali, ako zistili, ktorými štvoricami čísel mohol byť štvorsten popísaný a ktorými nie. Za slabé vysvetlenie spôsobu, ktorým ste zistili, ktoré steny sa kedy dotýkali plánu, sme strhli jeden bod. V prípade, že ste to zistili nesprávne, dostali ste 3 až 4 body podľa kvality postupu vami riešenej úlohy. Úloha už potom bola trochu iná ako tá pôvodná, kvôli iným počtom dotykov s plánom. Myslím, že všetci, čo mali túto chybu počítali s tým, že dve steny sa dotkli plánu 7-krát a dve 8-krát.

Príklad č. 6 (opravovali etome, Kozzy):

Najprv si označme tie tri čísla, ktoré učiteľ nepozná. Vieme, že sú to tri po sebe idúce čísla, tak si jedno označme ako a a ostatné si môžeme označiť napríklad ako $a + 1$ a $a + 2$. Avšak vieme, že za chvíľu budeme pri prevádzaní výpočtu opísaného učiteľom tieto čísla sčítavať. Pri tomto označení po sčítaní dostaneme $3a + 3$. No, tá trojka nám tam možno bude zavadzať, a keď sa nám tam nepáči – mne sa tam nepáči – tak navrhujem, aby sme si tie čísla označili spôsobom, pri ktorom by sme tam to číslo navyše nedostali. Ak si označíme to stredné číslo ako a, tie okolo sú teda o jedna menšie a väčšie. Potom dostaneme po sčítaní $3a$ (takto si označiť po sebe idúce čísla nebýva na škodu).

Takže sme si nakoniec označili tie tri neznáme čísla ako $a-1$, a, $a+1$. V zadaní máme povedané, že tieto čísla nie sú väčšie ako 60, teda to najväčšie z nich $a+1 \leq 60$. Z toho vieme, že $a \leq 59$. Taktiež vieme, že najmenšie číslo $a-1$ môže byť najmenej 1, teda a môže byť jedno z $2, 3, 4, \ldots, 58, 59$.

Ďalej si má žiak vymyslieť dvojciferné číslo deliteľné tromi, teda jedno z $12, 15, 18, 21, \ldots, 93, 96, 99$. Označme si ho ako b, a keďže vieme, že je deliteľné tromi, tak si ho môžeme zapísať ako $b = 3k$, kde k je celé číslo. Keďže k je vlastne $\frac{b}{3}$, tak k je jedno z čísel $4, 5, 6, \ldots, 31, 32, 33$.

Teraz sa poďme pozrieť, ako vlastne z týchto čísel dostávame výsledok. Ten si označme ako $\overline{\ldots pq}$, kde $\overline{pq}$ sú posledné dve cifry výsledku, ktoré učiteľ bude vedieť.

A teraz ten výpočet – súčet troch po sebe idúcich čísel a toho štvrtého, vynásobíme 67-mimi:

$$((a-1) + (a) + (a+1) + b) \cdot 67 = \overline{\ldots pq}$$

Upravíme, aby sme mohli vyňať 3 pred zátvorku:

$$\begin{aligned}(3a + 3k) \cdot 67 &= \overline{\ldots pq}\\ 67 \cdot 3 \cdot (a+k) &= \overline{\ldots pq}\\ 201(a+k) &= \overline{\ldots pq}\end{aligned}$$

Toto môžeme ešte prepísať trochu inak, nech lepšie uvidíme, čo tá 201 v súčine robí:

$$100 \cdot 2 \cdot (a+k) + (a+k) = \overline{\ldots pq}$$

Prvý sčítanec $100 \cdot 2 \cdot (a+k)$ sa násobí stomi, preto má na konci dve nuly a teda neovplyvňuje posledné dvojčíslie $\overline{pq}$. Takže jedine $a+k$ nám ovplyvňuje posledné dvojčíslie.

Ovplyvňuje nám $a+k$ iba toto posledné dvojčíslie? Poďme sa pozrieť, koľko môže byť $a+k$ najmenej a koľko najviac. Vyššie sme zistili, že a je niektoré z čísel $2, 3, 4, \ldots, 58, 59$ a k je niektoré z čísel $4, 5, 6, \ldots, 31, 32, 33$. Keď sčítame najmenšie možné a a najmenšie možné k zistíme, že $a+k$ môže byť najmenej 6, a sčítaním najväčšieho možného a a najväčšieho možného k zistíme, že najviac sa môže súčet $a+k$ rovnať číslu 92:

$$\begin{gathered}2 + 4 \leq a + k \leq 59 + 33\\ 6 \leq a + k \leq 92\end{gathered}$$

Ale čo to znamená? Keďže $a + k < 100$ tak už vieme, že $a+k$ ovplyvňuje *len* posledné dve cifry a teda posledné dve cifry sú presne $a+k$:

$$a + k = \overline{pq}$$

Učiteľ na začiatku pozná b (teda si vie dorátať k ako $\frac{b}{3}$) a pozná $\overline{pq}$ a chce zistiť a. Z predošlého vzťahu sme zistili, že a je vlastne rovné posledným dvom cifrám mínus $k = \frac{b}{3}$:

$$a = \overline{pq} - \frac{b}{3}$$

Teda učiteľ si takýmto ľahkým spôsobom vie dorátať prostredné neznáme číslo z tých troch po sebe idúcich čísel. Zvyšné dve dostane prirátaním a odrátaním 1. A výsledok vie z týchto čísel tiež dorátať postupom, ktorý je v zadaní.

Čo platí: Posledné dve cifry boli $a+k$ a tie cifry predtým $2 \cdot (a+k)$ (môže za to sčítanec $100 \cdot 2 \cdot (a+k)$), teda výsledné čísla vždy vyzerajú tak pekne: pred posledným dvojčíslím je napísané posledné dvojčíslie vynásobené dvomi. Ale, ak sme chceli toto využiť, tak to bolo treba všetko vysvetliť.

Komentár: Tento príklad ste mali väčšinou dobre. Niektorí ste mali iné riešenia, fungujúce, ale učiteľ by sa dobrú chvíľu potrápil, kým by zistil tie čísla.

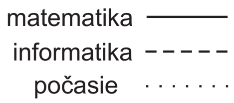
Často ste v riešení mali nie úplne povysvetľované všetky kroky. Napríklad dôležitá vec: $a + k < 100$, a teda že sa zvyšné čísla dajú jednoznačne vyrátať z posledných dvoch cifier a známeho dvojciferného čísla deliteľného tromi (b).

Príklad č. 7 (opravoval Laco):

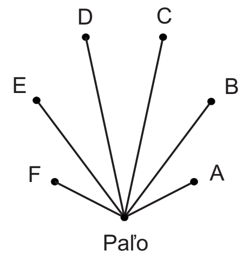
V zadaní sme mali popísaných nejakých 6 ľudí a Paľa. Píšu si o 3 rôznych témach: matematika, informatika a počasie. Budeme si to kresliť. Ľudí si zakreslíme ako vrcholy a tému, o ktorej sa dvaja ľudia A a B rozprávajú, si zaznačíme hranou medzi vrcholmi A, B. Máme 6 ľudí, označme si ich A, B, C, D, E, F, a Paľa, toho si označme Paľo. Pre 3 rôzne témy budeme potrebovať 3 typy hrán. Tak nech je téma matematika značená plnou hranou, informatika čiarkovanou a počasie bodkovanou (Obrázok 6). Dostaneme tak tzv. graf, vynikajúcu pomôcku pre takýto typ úloh.

Keďže zadanie pozostávalo z krátkych a veľavravných viet, ktorým niektorí z vás odmietli porozumieť, popíšme najprv, čo sme v zadaní vlastne mysleli a následne to zaznačíme do grafu.

- Každá dvojica ľudí si dopisuje práve o jednej téme. Inak povedané: dopisuje si každý s každým. V grafe to znamená, že medzi *každými dvoma* bodmi bude práve jedna hrana.
- Paľo si so všetkými šiestimi ľuďmi píše o matematike. Takže v grafe zakreslíme tému matematika (plnú hranu) medzi Paľom a všetkými ostatnými účastníkmi: Obrázok 7. Ostatné hrany doplníme neskôr.
- Zvyšných 6 ľudí si píše o každej z tém s aspoň jedným človekom. Teda každý z ľudí (okrem Paľa) s niekým debatuje o informatike, s niekým o počasí a s niekým o matematike. V grafe by teda mali z každého vrcholu A až F vychádzať všetky 3 typy hrán. Všimnime si, že o matematike si už každý s jedným človekom píše - s Paľom (podľa zadania aj Paľo je len človek).



Obrázok 6: Typy hrán



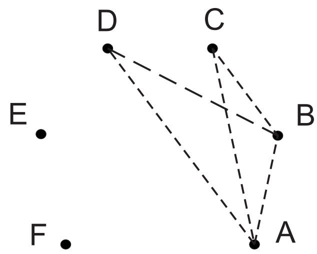
Obrázok 7: Graf: zadanie

A teraz môže prísť na rad otázka: Ak platia podmienky v zadaní, existuje určite trojica ľudí, v ktorej si každý s každým dopisuje o tej istej téme? V našom grafe takáto trojica vyzerá ako trojuholník zložený z hrán rovnakého typu.
To, že tam takýto trojuholník *určite* existuje znamená, že keď pridávam hrany ľubovolne, nepodarí sa mi dokresliť všetky hrany bez toho, aby takýto trojuholník vznikol. Budeme sa teda snažiť dopĺňať hrany tak, aby nevznikol. Poďme teda overiť, že sa nám to nemôže podariť.

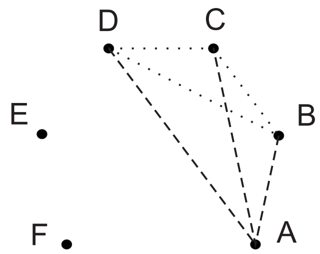
Hneď na začiatku si všimneme, že ak doplníme čo len jednu tému matematika medzi ľudí A až F, vznikne hneď „matematický trojuholník" (z plných hrán) medzi dvoma ľuďmi a Paľom. Takže doplnenie matematiky určite vedie k vzniku trojice a my sa teda musíme zamerať na ostatné možnosti - teda možnosti keď budeme pridávať len témy informatika a počasie.
Pre zjednodušenie si teraz môžeme odmyslieť Paľa. S ním už žiadne ďalšie hrany nevzniknú (všetky už má), ani žiaden matematický trojuholník, ktorý by Paľa obsahoval, nevznikne (matematiku už nedopĺňame). Ostalo teda šesť vrcholov A, B, C, D, E, F, ktoré ideme spájať bodkovanými (počasie) a čiarkovanými (informatika) hranami. Zoberme si teraz ľubovoľného človeka, napr. A. Z vrcholu A pôjde do zvyšných vrcholov 5 hrán. Keďže máme už len dva typy hrán, s istotou môžeme povedať, že minimálne 3 hrany z bodu A budú rovnaké. Stačí si rozpísať možnosti - z piatich hrán môžu byť: 1 informatika a 4 počasie; 2 informatiky a 3 počasie; 3 informatiky a 2 počasie; a napokon 4 informatiky a 1 počasie (aspoň 1 hrana musí byť z každej témy!). Vždy sú teda aspoň tri hrany z bodu A rovnaké.

Tak nech sú to napr. hrany do B, C, a D a ich téma je informatika (na obrázkoch 8 a 9). Tieto vrcholy a túto tému sme si vybrali len na ukážku, v skutočnosti postup funguje pre hocijaký výber vrcholov a témy a práve preto je taký univerzálny. A teraz sa už len stačí pozrieť na spomínané tri vrcholy B, C, D. Ako môžu mať medzi sebou hrany? Možnosti sú:

1. Niektoré dva vrcholy z B, C, D sú spojené čiarkovanou hranou (informatika). Ale v tom prípade vzniká informatický trojuholník (Obrázok 8).
2. Žiadne dva vrcholy z B, C, D nie sú spojené čiarkovanou hranou, teda všetky sú navzájom pospájané bodkovanou hranou (počasie). Trojuholník BCD je však potom trojuholník z počasia (meteorologický trojuholník) (Obrázok 9).



Obrázok 8: Vzniká informatický trojuholník



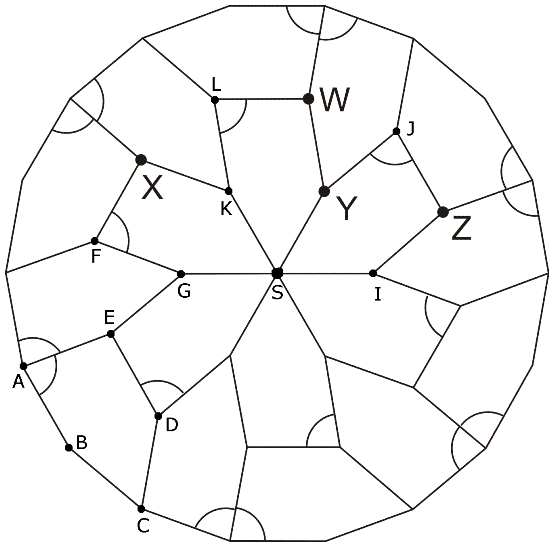
Obrázok 9: Vzniká meteorologický trojuholník

Takže meteorologickému trojuholníku sa nevyhneme.

Ak by sme si spočiatku zvolili tému počasie namiesto informatiky, len by si tieto dve témy vymenili role. Podobne, ak by sme si zvolili iné vrcholy namiesto A, B, C, D. Týmto postupom sme skutočne odôvodnili, že v každom prípade vznikne trojuholník z niektorej témy, pretože jedna zo situácií, ktoré sme si popísali, určite nastane, nech by sme priradili ľuďom témy akokoľvek.
Odpoveď: Určite existuje trojica ľudí, v ktorej si každý s každým dopisuje o tej istej téme.
Komentár: No, nepamätám si, kedy naposledy som mal tak málo úplných 10-bodových riešení. Asi len traja z vás napísali úplne uspokojivé riešenie. Preto vám teraz napíšem, čo mi vo vašich riešeniach chýbalo. Najviac mi chýbalo, keď ste nenapísali, akým spôsobom sa idete s príkladom popasovať a rovno ste sa vrhli na pridávanie tém. Treba napísať aspoň, že idem skúsiť dopĺňať témy, aby mi taká trojica nevznikla… Tiež som nebol spokojný, keď ste skúšali dopĺňať hrany konkrétne. Dá sa aj tak, ale potom sa treba oháňať podobnými úvahami, ako vo vzoráku (že aj váš spôsob platí všeobecne a prečo), alebo skúsiť všetky možnosti, ktorých, ako tušíte, bolo príliš veľa. Správny výsledok ma uspokojil na 1 bod, viac ma mohli uspokojiť už len vaše myšlienky a postup. A to v celej škále od 1 do 9 bodov. Páčilo sa mi napr. riešenie Karolínky Mojžišovej, ktoré bolo tak pochopiteľné, že som ho len prečítal a už som spokojne dával 10 bodov. A na záver rada, ktorú by ste si mohli odniesť aj do budúcna: Nebojte sa kresliť si takéto obrázky-grafy, vždy keď máte úlohu, v ktorej treba prepájať ľudí, objekty, alebo aj situácie. Tento príklad bol z tých, čo sa len ťažko dali vyriešiť spočítavaním dvojíc a trojíc.

Príklad č. 8 (opravovali Ľubka, Palo, Sašo):

Najprv si vyriešme časť, ktorá je pre obe „skupiny“ rovnaká – teda poďme zistiť, aké sú vnútorné uhly každého z 5-uholníkov. Nakreslime si obrázok...



Obrázok 10: 18-uholník

Aký veľký je každý vnútorný uhol 18-uholníka? Tento útvar si vieme rozdeliť na 18 rovnoramenných trojuholníkov, základňou každého bude strana 18-uholníka a všetky sa budú stretávať v jeho strede. Súčet ich uhlov je $18 \cdot 180° = 3240°$. Lenže tu máme zarátané niektoré uhly navyše – presnejšie povedané, plný uhol okolo stredu 18-uholníka. To znamená, že súčet uhlov v 18-uholníku je $3240° - 360° = 2880°$, čiže jeden vnútorný uhol má veľkosť $160°$.

Pozrime sa teraz na obrázok 18-uholníka zo zadania. Ako prvé udrie do očí, že uhol pri vrchole B je rovnako veľký, ako vnútorný uhol 18-uholníka, čiže má $160°$. Ďalej, dvojica rovnakých uhlov pri vrchole A spolu dáva $160°$, čiže každý z nich je rovný $80°$. V bode S sa stretáva až šesť rovnakých uhlov (ktoré sú zhodné s uhlom pri vrchole C), čo znamená, že každý z nich má veľkosť $\frac{360°}{6} = 60°$. Zo zadania ďalej vieme, že strany malých päťuholníkov sú rovnako dlhé. Z toho vyplýva, že trojuholník BCD je rovnostranný (podľa vety **sus**). Čiže úsečka BD je rovnako dlhá ako AB, AE, DE. To ale znamená, že útvar $ABDE$ musí byť kosoštvorec! V takomto útvare vieme, že súčet „priľahlých“ uhlov k jednej strane je $180°$, čiže veľkosť uhla pri vrchole E je $180° - 80° = 100°$ (taký istý ako uhol pri B). Uhol pri vrchole D si vieme rozložiť na dva uhly – jeden, ktorého veľkosť je $80°$ (rovnaká, ako veľkosť protiľahlého uhla v kosoštvorci $ABDE$) a druhý, ktorého veľkosť je $60°$ (z rovnostranného trojuholníka), čiže tento uhol má $140°$.

Odpoveď: Veľkosti uhlov pri vrcholoch sú: $A = 80°$, $B = 160°$, $C = 60°$, $D = 140°$ a $E = 100°$.

A (okrem Gamče): Teraz poďme zistiť, aký veľký je uhol ZWX. Keďže sú všetky 5-uholníky zhodné, musí platiť $|\sphericalangle ZSI| = |\sphericalangle WSY|$. To znamená, že uhol ZSW má veľkosť $|\sphericalangle ZSW| = |\sphericalangle YSI| + |\sphericalangle WSY| - |\sphericalangle ZSI| = |\sphericalangle YSI| = 60°$. Keďže úsečky SZ a SW spájajú rovnaké dvojice bodov päťuholníka, musia mať rovnakú dĺžku. Čiže trojuholník ZSW je rovnostranný – znovu podľa vety **sus**. To znamená, že aj uhol SWZ má veľkosť $60°$. Presne rovnakým spôsobom vieme dokázať, že trojuholník XSW je tiež rovnostranný (keby sme si toto uhlové cvičenie zopakovali, avšak stačí, keď napíšeme, že je to rovnaká situácia), takže uhol XWS má $60°$. Z obrázka je zjavné, že súčtom veľkostí uhlov XWS a SWZ je dostávame veľkosť uhla ZWX, čiže náš hľadaný uhol má veľkosť $120°$.

Odpoveď: Veľkosť uhlu ZWX je $120°$.

B (pre Gamču): V tejto časti máme zistiť, aká je veľkosť uhla XYZ. Najjednoduchšie bude, keď si jeho veľkosť poskladáme pomocou menších uhlov: ZYJ, JYW, WYK a XYK.

Trojuholník ZYJ je rovnoramenný (zo zadania vieme, že strany 5-uholníkov sú rovnako dlhé) so základňou YZ. Uhol pri vrchole Y je rovný tomu pri vrchole A z prvej časti príkladu, čo znamená, že uhol ZYJ má veľkosť $\frac{180°-80°}{2} = 50°$. Uhol JYW je rovnako veľký, ako uhol pri vrchole C z predchádzajúcej časti, čiže má $60°$. Podobne ako útvar $ABDE$ z prvej časti, aj útvar $KYWL$ je kosoštvorec, čiže uhol WYK je rovnako veľký ako uhol KLW, čiže má $80°$. Trojuholník XKY je znovu rovnoramenný so základňou XY (keďže $KYWL$ je kosoštvorec). Uhol pri vrchole K je zložený zo $60°$-vého uhla z trojuholníka XKL a $100°$-vého uhla z kosoštvorca $KYWL$, čiže spolu má $160°$. To znamená, že $|\sphericalangle XYK| = \frac{180°-160°}{2} = 10°$.

Z obrázka je zjavne vidieť, že $|\sphericalangle XYZ| = |\sphericalangle ZYJ| + |\sphericalangle JYW| + |\sphericalangle WYK| - |\sphericalangle XYK| = 50° + 60° + 80° - 10° = 180°$.

Odpoveď: Veľkosť uhlu XYZ je $180°$.

Komentár: Najprv vás musíme všetkých pochváliť, pretože ste skoro všetci vyriešili príklad správne. Lenže na druhú stranu sa vyskytli problémy s postupmi. Veľa z vás považovalo za fakty veci, ktoré neboli úplne jasné priamo zo zadania, ale bolo potrebné ich aj odôvodniť. Napríklad ak ste si povedali, že takýto päťuholník sme schopní rozdeliť na kosoštvorec a trojuholník a nezdôvodnili ste to, boli ste potrestaní stratou 1 až 2 bodov. Rovnaký počet bodov ste mohli stratiť za neodôvodnenie veľkostí niektorých uhlov. Ak ste sa v druhej časti pomýlili, strhli sme vám zväčša po 1 bode, no ak ste ju odflákli a nevysvetlili dostatočne, prišli ste automaticky o 3 alebo 4 body. Žiadne iné nejasnosti sa vo vašich riešeniach nevyskytli, za čo vám udeľujeme veľkú pochvalu.

Príklad č. 9 (opravovala Halucinka):

Označme si výšku dotyku 10-metrového rebríka so stenou $|AD| = a$ a výšku dotyku 12-metrového rebríka ako $|BC| = b$. Výšku priesečníka týchto dvoch rebríkov, ktorú chceme zistiť, si označme $|EP| = v$. Nech $|AP| = x$ a $|BP| = y$. Zo zadania vieme, že $x + y = 6\,\text{m}$, $|BD| = 10\,\text{m}$ a $|AC| = 12\,\text{m}$.

Keďže AD, EP aj BC sú kolmé na AB, platí, že pri vrcholoch A , P a taktiež B zvierajú so zemou pravé uhly. Ďalej si všimneme súhlasné uhly, ktoré vyplývajú z rovnobežnosti AD, EP a BC. Teraz už vidíme, že platí: trojuholník ABD je podobný s trojuholníkom PBE a trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom APE, pretože majú všetky tri uhly zhodné. Z toho vieme, že:

$$\frac{x}{v} = \frac{x+y}{b}$$
$$\frac{y}{v} = \frac{x+y}{a}$$

Ak tieto dve rovnice sčítame, nič tým nepokazíme. Ďalej upravujeme:

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{v} = \frac{x+y}{b} + \frac{x+y}{a}$$
$$\frac{x+y}{v} = (x+y) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{a+b}{a \cdot b}$$
$$v = \frac{a \cdot b}{a+b} \tag{1}$$

Z Pytagorovej vety si vieme vyjadriť strany a aj b. Z trojuholníka ABD vieme:

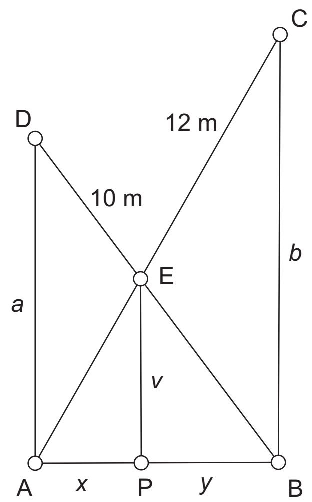
$$a^2 + 6^2\,\mathrm{m}^2 = 10^2\,\mathrm{m}^2$$
$$a = \sqrt{100-36}\,\mathrm{m}$$
$$a = \sqrt{64}\,\mathrm{m}$$
$$a = 8\,\mathrm{m}$$

Z trojuholníka ABC vieme:

$$b^2 + 6^2\,\mathrm{m}^2 = 12^2\,\mathrm{m}^2$$
$$b = \sqrt{144-36}\,\mathrm{m}$$
$$b = \sqrt{108}\,\mathrm{m}$$

Toto dosadíme do (1). Teda priesečník našich dvoch rebríkov bude vo výške:

$$v = \frac{8 \cdot \sqrt{108}}{8+\sqrt{108}}\,\mathrm{m}$$



Obrázok 11: Rebríky

Odpoveď: Priesečník rebríkov je vo výške $v = \frac{8\cdot\sqrt{108}}{8+\sqrt{108}}\,\mathrm{m}$
Komentár: Veľa z vás to riešilo goniometrickými funkciami (sínus, kosínus). Avšak pokiaľ ich vyjadrujete číselne, tak to častokrát nie je presné. Takisto veľa z vás si kde-tu niečo zaokrúhlilo, čo je dosť nepresné, hlavne ak zaokrúhľujete v medzivýpočtoch. Za to som strhávala tak jeden až dva bodíky. Stávalo sa ešte, že ste si vymysleli nejaké tvrdenia, neukázali ste, že platia a tieto tvrdenia vám neplatili, vtedy išli už aspoň 4 body dole. Ale vcelku ste si s týmto príkladíkom poradili dobre. Až na menšie nepresnosti.

Prémia (opravovali Jankaa, Pištík):

Zadanie: Máme 10 vrecúšok obsahujúcich mince. V deviatich vrecúškach sú pravé mince (vážia po 10 gramov) a v jednom sú všetky mince falošné (vážia po 11 gramov). Určte pomocou jedného váženia, v ktorom vrecúšku sú falošné mince.
Riešenie: V zadaní sa nič nehovorí o počte mincí vo vrecúšku, ani o type váhy, aký treba používať. Naše riešenie predpokladá digitálny typ váhy, t.j. položíme mincu a zistíme, koľko váži. Taktiež budeme predpokladať, že dokážeme vrecúška zoradiť tak, že v prvom vrecúšku bude aspoň 1 minca, v druhom aspoň 2, v treťom aspoň 3, v deviatom aspoň 9. V desiatom vrecúšku teoreticky nemusí byť žiadna minca.

Vrecúška označíme od 1 po 10. Zoberieme z prvého vrecúška 1 mincu, z druhého vrecúška 2 mince, z tretieho vrecúška 3 mince, zo štvrtého 4, až po 9. Z desiateho vrecúška nevyberieme ani jednu mincu. Mince položíme na váhu a odčítame ich hmotnosť. Ak by boli mince vo vrecúškach 1–9 pravé, bola by výsledná hmotnosť 450 g a vedeli by sme, že falošné mince sú v desiatom vrecúšku. Každá falošná minca je o 1 gram ťažšia ako pravá. Ak sú falošné mince v inom ako v desiatom vrecúšku, ukáže nám váha vyššiu hmotnosť ako 450 g.

Ak bude hmotnosť vyššia o 1 g, vieme, že na váhe je položená len jedna falošná minca, teda tá, ktorá je z prvého vrecúška. Ak bude hmotnosť vyššia o 2 g, vieme, že falošné mince sú dve, teda tie z druhého vrecúška. A tak až po 9 g navyše, kedy sú falošné mince v deviatom vrecúšku, z ktorého sme ich vytiahli 9.
Komentár: Vyskytovali sa dva veľmi podobné typy riešení. Väčšina bola správnych. Akurát sa mi často zdalo, že ste niečo predpokladali a nenapísali váš predpoklad. Alebo ste nevysvetlili dostatočne prečo platí vaše tvrdenie. Ja som chcela byť zlá a strhávať vám za to body, no Pištík vás zachránil, a preto máte takmer všetci šesť bodov.

Riešenia so závažnejšou chybou majú 5 bodov. Veľmi som bola prekvapená, pokiaľ ste si správne zistili zadanie a neriešili príklad.

Výsledková listina po 2. kole letnej série 2007/2008

	Meno	Škola	Trieda	Σ_1	1	2	3A	3B	4	5	6	7	8A	8B	9	P	:(	Σ_2
1	Petrucha Jaroslav	SŠ Metodova 2, BA	Tercia	56			10		10	9	8	10				6		109
2	Ivan Lukáš	ZŠ a G Košická, BA	Sekunda A	55		10	4		10	8	8					6		101
3	Bednár Stanislav	ZŠ a G Košická, BA	Sekunda A	44		10	10		10	6	10					6		96
4	Ďurajková Hana	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	42	10	10	10		7	7						6		92
4	Sučík Samuel	SZŠ Čelovce 3	6	45		9	10		8	7	3		7			6		92
6	Krajčírová Nicole	ZŠ a G Košická, BA	Sekunda A	39		5	10		7	10	10						1	80
7	Hanulová Lenka	ZŠ a G Košická, BA	5.A	31	10	8	3		7	8						6		73
8	Pivovarník Roman	G Mudroňová, Prešov	O2.A	33		10	8		10	6	3							70
9	Zabloudilová Ema	CZŠ Narnia, BA	4	35	10	8	1		10			4				0		68
10	Kováčová Enka	G Slnečná 2, Šamorín	Kvarta A	41						5	3		8		8			65
10	Zabloudil Jakub	CZŠ Narnia, BA	6	40		8	1		8	4		4				0		65
12	Uhlárová Petra	ZŠ a G Košická, BA	8	45					10	9								64
13	Klembarová Barbora	G Kukučínova 1, PP	Kvarta	34						8	8		8					58
14	Pauliaková Sandra	G Jána Chalupku, Brezno	Tercia	27			10		10	3	3	4				1	1	57
15	Ivanov Marián	ZŠ a G Košická, BA	Tercia A	27			10		7		8		4					56
16	Fučík Roman	ŠPMNDaG Skalická 1, BA	Príma A	34	1	8	1		10	1					1			55
17	Fecková Daniela	G Pankúchova 6, BA	K.B	37									7					44
18	Kuchár Martin	G Slnečná 2, Šamorín	Sekunda A	25		9			10		7						10	41
18	Vrabec Michal	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	11	10	4	4		9	3								41
20	Camara Assa	SŠ Metodova 2, BA	Sekunda A	40		2	0		6		2						20	40
20	Ferianc Oliver	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	12	10	9	1		8							0		40
20	Márkus Nikolas	G Slnečná 2, Šamorín	Tercia A	40														40
23	Kořínková Hanka	G sv. Uršule, BA	Sekunda A	39													1	39
24	Tomek Matej	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	17	10	3	0		7							0		37
25	Jalovecký Matúš	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	4	6	8	0		10	7						0		35
26	Camara Anna	SŠ Metodova 2, BA	Príma A	33	10	2	1										50	33
27	Váry Šimon	SG Bajkalská, BA	Kvarta	32													1	32
28	Klugová Ema	ZŠ a G Košická, BA	Sekunda A	31														31
29	Krajčí Roman	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	17	7	4	0			1								29
30	Havlíčková Petra	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	12	3	3	1		5	1								25
30	Kmeťová Katarína	G Kukučínova 1, PP	Kvarta	24											1			25
32	Kiaček Matúš	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	15		6												21
33	Sučíková Katarína	SZŠ Čelovce 3	4	0	10	10												20
34	Sopóci Martin	SG Bajkalská, BA	Kvarta	0						8	8	4			8		10	18
35	Hrmo Richard	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	15														15
36	Hanzeľová Bibiána	G Alejová 1, KE	Príma	14														14
36	Jurášková Ivona	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	14														14
38	Prukschová Kristína	G sv. Uršule, BA	Sekunda A	13														13
38	Sušienková Michaela	G Tilgnerova 14	Sekunda A	0		4	1		8		1						1	13
40	Šteňová Júlia	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	13														13
41	Haršány Samír	ZŠ a G Košická, BA	Príma A	11														11
42	Májek Juraj	ZŠ A.Dubčeka, BA	4.B	8			1									1	1	9

Výsledková listina po 2. kole letnej série 2007/2008
(Gymnázium Grösslingová)

	Meno	Škola	Trieda	Σ_1	1	2	3A	3B	4	5	6	7	8A	8B	9	P	:(	Σ_2
1	Matejovičová Tatiana	G Grösslingová, BA	Tercia	54				10	10	10	10			9		6		109
2	Lakotová Barbora	G Grösslingová, BA	Príma	54	10	10		5	8	10	9					6		107
3	Hevesi Pavel	G Grösslingová, BA	Kvarta	53						10	8	7		9	10	6		103
3	Reháková Mária	G Grösslingová, BA	Tercia	51				8	10	10	10			8		6		103
3	Strakáčová Jana	G Grösslingová, BA	Tercia	55				10	10	4	10	8				6		103
6	Karpišová Iveta	G Grösslingová, BA	Kvarta	53						9	10	6		9	8	6		101
6	Kimerling Martin	G Grösslingová, BA	Kvarta	49						10	10	10		9	8	6	1	101
8	Žákovská Uršula	G Grösslingová, BA	Kvarta	52						9	5	10		10	8	6		100
9	Jančovič Pavel	G Grösslingová, BA	Kvarta	46						9	10	7		10	10	6		98
9	Muravský Jakub	G Grösslingová, BA	Sekunda	50		7		8	10	7	10					6		98
11	Žákovská Paulína	G Grösslingová, BA	Sekunda	55		5			10	10	5	6				6		97
12	Kossaczká Marta	G Grösslingová, BA	Tercia	53				10	10	3	10	10						96
12	Krakovská Hana	G Grösslingová, BA	Sekunda	45		10			10	10	10	5				6		96
14	Mojžišová Karolína	G Grösslingová, BA	Sekunda	45		9		5	10	10	3	10				6		95
14	Pellerová Daniela	G Grösslingová, BA	Tercia	53				10	10	4	10	4		8				95
16	Suchý Daniel	G Grösslingová, BA	Príma	45	10	10		3	10	10	8						1	92
17	Hraška Peter	G Grösslingová, BA	Tercia	52				10	10	6	3			4		5		90
17	Šichman Peter	G Grösslingová, BA	Kvarta	44						9	10	5		9	8	6	1	90
19	Ivanova Albena	G Grösslingová, BA	Tercia	44				10	10	4	10	4		8				86
19	Muravský Juraj	G Grösslingová, BA	Kvarta	36						10	10	5		9	10	6		86
19	Spišiak Ján	G Grösslingová, BA	Kvarta	40						10	10	10		7	3	6		86
22	Polách Juraj	G Grösslingová, BA	Kvarta	45						4	10	7		8	5	4		83
23	Osuský Peter	G Grösslingová, BA	Kvarta	36						10	10	5		4	10	6		81
24	Hučko Adam	G Grösslingová, BA	Kvarta	35						8	8	2		5	8	6	1	71
25	Párnická Dominika	G Grösslingová, BA	Tercia	31				10	10		5	8		6				70
26	Bock Michal	G Grösslingová, BA	Tercia	37				10	10	4		2		3				66
27	Pavlenda Ján	G Grösslingová, BA	Príma	29	10	8		4	7	8							1	65
28	Hudaček Robert	G Grösslingová, BA	Kvarta	38						3	4	2		5	8	5	1	64
29	Kollár Dan	G Grösslingová, BA	Tercia	34				8	7		0	5		5	0	0		59
29	Krakovská Ema	G Grösslingová, BA	Príma	25	10	3			10	7						5	1	59
31	Staruch Andrej	G Grösslingová, BA	Tercia	31					10	1	3			7		5		57
32	Le Dinh Tiep	G Grösslingová, BA	Príma	46		5											1	50
33	Löfflerová Ema	G Grösslingová, BA	Tercia	32				10	1					4				47
33	Svoboda Daniel Kristian	G Grösslingová, BA	Príma	19	10	4			10	5							1	47
35	Müller Viktor	G Grösslingová, BA	Príma	17	10	8		0	6	6							1	46
36	Kuzmík Ján	G Grösslingová, BA	Kvarta	43													1	43
37	Németh Samuel	G Grösslingová, BA	Príma	39													1	39
38	Graus Lukáš	G Grösslingová, BA	Kvarta	31														31
39	Bezák Jakub	G Grösslingová, BA	Tercia	0				10	10	3	3			3				29
40	Dudlák Oliver	G Grösslingová, BA	Príma	21		2		0	4	1							1	27
40	Poláková Zuzana	G Grösslingová, BA	Príma	27														27
42	Abrhám David	G Grösslingová, BA	Príma	13	6	3		0	0	5							1	26
42	Brnušák Oliver	G Grösslingová, BA	Príma	26														26
44	Statelov Martin	G Grösslingová, BA	Kvarta	23													2	23
45	Flak Albert	G Grösslingová, BA	Tercia	21													1	21