RIEŠKY

matematický korešpondenčný seminár
10. ročník, 2007/2008

Ahoj Rieškarky, Rieškari a Rieškarčatá,

už sa zdalo, že je tu teplo, keď tu zrazu sa opäť ochladilo. Že vraj prvý jarný deň. Ale ba, zima ako v mrazničke. Aspoň tak to pripadalo mne, ja som totiž veľmi teplomilná. Ale ako tak pozerám von, začína sa aspoň trochu zdvíhať teplota, takže snáď čiapky, šály ani rukavice už túto jar nehrozia. Samozrejme, ak nepočítam tých, čo boli lyžovať cez prázdniny.

Apropo, prázdniny… Veľká noc. Tak čo, Rieškarky, vyšibané, premočené? Už aj ochorieť ste stihli z toho? Tak to gratulujem, veď nám predsa želali šibači veľa zdravia a krásy do ďalšieho roku. Nuž, je pravda, že oblievanie vonku, keď je okolo nuly, nie je práve príjemná forma otužovania, ale aj snaha sa cení. A čože by človek nespravil pre krásu, však? A čo vy, Rieškari naši? Máte nádielky, sladkosti, kde-tu dáky koláč alebo peniažtek? A koľko z vás postretla v utorok odveta v podobe vyšibania dievčatami? Že nikoho? Dievčatá, polepšime sa, o rok je predsa šanca to oplatiť…

Ale prázdniny prešli, všetci sme späť v škole a určite nie je na zahodenie trochu pohybu, ktorý nepozostáva z utekania za obeťami šibania alebo plávania vo vode, ktorú na nás lejú. A práve na to mysleli vaši vedúci a priatelia, keď vymysleli výlet! Viac podrobností je uvedených pri jeho popise, ktorý je priamo pod týmto úvodom.

A dovtedy si užite novú knižku s ešte krajšou formou. Ako som sa dopočula, už je vraj robená v TEX-u, čo je pre našu milú knižku veľký pokrok. A popri čítaní, čakaní na výlet, alebo jednoducho pri odpočinku si užívajte tiež snáď čoraz krajšie dni a snáď už aj trochu slniečka.

Dovtedy sa s vami lúči vaša Na-Teplo-Sa-Veľmi-Tešiaca-A-Leto-Už-Mať-Túžiaca Allie :)

Výlet

Zimné sústredenie je už dávno za nami a letné je ešte stále v nedohľadne. Tak ak si chceš pripomenúť tie pekné dni v Brezovej pod Bradlom, či konečne nás Rieškarov – riešiteľov a vedúcich – uvidieť naživo, príď **12. apríla** na **AS Mlynské Nivy**. Vo vestibule sa stretneme presne **o 8.10** (nemeškaj, lebo môžeš zmeškať autobus). A kam sa vyberieme? Autobusom sa najskôr odvezieme do Svätého Jura a odtiaľ sa vyberieme na turistický výlet aprílovou prírodou. Nakoniec sa vrátime opäť na Mlynské Nivy. Ak bude pekne, tak až niekedy okolo šiestej.

A čo si treba zobrať?

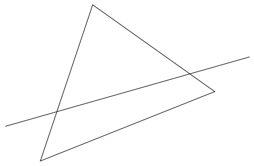
Peniažky na autobus (celý lístok tam i späť by mal stáť asi 50 korún, ak chceš zľavu, tak si nezabudni preukážku), **pitie**, **jedlo**, **niečo na opekanie** (ak bude pekne, tak sa pokúsime nájsť ohnisko), **pršiplášť** či poriadnu vetrovku (bude predsa apríl) a nezabudni na **potvrdenie** od rodičov, že súhlasia s tým, aby si sa výletu zúčastnil (a nech ešte pripíšu, či po skončení môžeš ísť domov sám, alebo si po teba prídu na stanicu).

Ak bude ráno pršať, výlet sa nekoná.

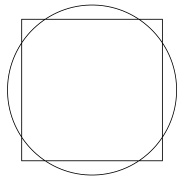
Tešíme sa na teba.

Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2007/2008

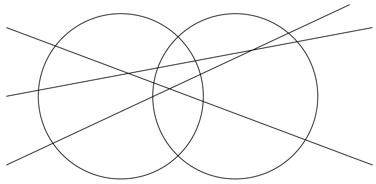
Príklad č. 1 (opravovala Niwka):



Obrázok 1: Dva priesečníky



Obrázok 2: Osem



Obrázok 3: 17 priesečníkov

1. Trojuholník a priamka
   V tomto prípade ide o priesečníky troch úsečiek a priamky. Priamka môže mať s úsečkou najviac jeden priesečník. To znamená, že s tromi úsečkami môže mať priesečníky maximálne tri. Pretože úsečky tvoria trojuholník, priamka môže pretínať maximálne dve z nich (je to pekne vidieť, ak si nakreslíte priamku a na ňu sa pokúšate nakresliť trojuholník – vždy dva body zostanú v jednej polrovine).
2. Štvorec a kružnica
   Kružnica môže mať s jednou úsečkou (pokiaľ je dostatočne dlhá) maximálne dva priesečníky. Keďže štvorec je zložený zo štyroch úsečiek, tak maximálny počet priesečníkov je $4 \cdot 2 = 8$.
3. Dve kružnice a tri priamky
   Najprv priesečníky medzi dvoma kružnicami navzájom: dve kružnice môžu mať maximálne dva priesečníky. Potom priesečníky typu: priamka pretína kružnicu: Jedna priamka s jednou kružnicou má maximálne 2 priesečníky, ak zoberieme tri priamky, bude to maximálne $2 \cdot 3 = 6$ priesečníkov, a keďže kružnice máme dve, bude to ešte dvojnásobok, čiže $2 \cdot 6 = 12$ priesečníkov typu priamka pretína kružnicu. Napokon priesečníky medzi priamkami: Dvojica priamok môže mať maximálne jeden priesečník, ak pridám ešte jednu priamku, dostanem dovedna 3 dvojice priamok, takže tri priamky môžu mať maximálne $3 \cdot 1$ priesečníkov. A spolu je to $2 + 12 + 3 = 17$ priesečníkov. Takto sa to naozaj dá nakresliť, viď obrázok.

Poznámka: Pripúšťame aj takéto riešenie:

1. Priamka a trojuholník majú nekonečno priesečníkov, ak priamku preložíme jednou stranou trojuholníka.
2. Osem
3. V zadaní nie je napísané, že tie tri priamky majú byť navzájom rôzne. Tak keby sme mali jednu priamku a prehlásili, že to sú dve, lebo zadanie to nezakazuje. Získame nekonečno priesečníkov.

Komentár: Často nebolo dostatočne zdôvodnené, prečo je číslo, ktoré ste uviedli maximálnym počtom priesečníkov, prípadne to nebolo zdôvodnené vôbec.

Bodovanie: Za správne odpovede ste mohli v každom prípade získať dva body, teda spolu šesť bodov. Za zdôvodnenie a postup ste mohli získať zvyšné štyri body.

Príklad č. 2 (opravovala Zuzka):

Zo zadania sme sa dozvedeli, že spomedzi troch detí – Ignáca, Vikiho a Janky, má najľahšiu tašku Ignác a najťažšiu Janka. Vikiho taška teda musí byť stredne ťažká. Ignác má v taške dve jablká a jednu hrušku a Viktor dva pomaranče a jednu hrušku. Keď z oboch tašiek (Ignácovej aj Vikiho) vyberieme jednu hrušku, Vikiho taška bude stále ťažšia ako Ignácova (lebo každé dve hrušky vážia rovnako). V Ignácovej taške ostali dve jablká a vo Vikiho dva pomaranče. Teraz teda vieme, že dve jablká sú ľahšie ako dva pomaranče, čiže *jablko je ľahšie ako pomaranč.*

Miška má v taške jablko, pomaranč a hrušku. Odoberme z nej jednu hrušku. V jej taške ostalo jablko a pomaranč. Keďže jablko je ľahšie ako pomaranč, tak dve jablká budú ľahšie ako jablko a pomaranč. A tiež jablko a pomaranč sú ľahšie ako dva pomaranče. Inými slovami povedané, Ignácova taška, z ktorej sme zobrali hrušku je ľahšia ako Miškina taška, z ktorej sme zobrali hrušku a tá je ľahšia ako Vikiho taška, z ktorej sme taktiež zobrali hrušku. Keď do týchto tašiek vrátime hrušky, dostaneme tašky s ich pôvodnými hmotnosťami a stále nám bude platiť, že Ignácova taška je ľahšia ako Miškina a Miškina je ľahšia ako Vikiho (veď do každej tašky sme vrátili rovnako ťažkú vec). No a na záver ešte treba dodať, že Miškina taška je ľahšia ako Jankina (Jankina taška je najťažšia).

Odpoveď: Miškina taška je ťažšia ako Ignácova, ľahšia ako Vikiho a taktiež ľahšia ako Jankina.

Komentár: Najväčšou a najčastejšie sa opakujúcou chybou bol chýbajúci postup. Iba za riešenie boli dva body. Taktiež často ste zabudli porovnať Miškinu a Jankinu tašku, naozaj jednoduchá vec, no v zadaní sme sa na ňu tiež pýtali.

Príklad č. 3 (opravovali Laco a Tinka):

A (okrem Gamče): V prvom rade si treba uvedomiť, ako Miška domácu úlohu počítala. Je to klasický postup pri násobení viacciferných čísel: Činitele si napíšeme pod seba. Následne pod čiaru prenásobíme najprv prvého činiteľa počtom jednotiek druhého činiteľa (teda $F1F \cdot E = 63C$). Pod to prenásobíme prvého činiteľa počtom desiatok druhého činiteľa ($F1F \cdot 2 = D2D$), ale keďže ide o desiatky, tento súčin je v skutočnosti desaťkrát väčší ako to, čo nám vyjde, takže ho posunieme doľava o jednu cifru. Nakoniec obidva súčiny sčítame a dostaneme výsledok ($D8BC$).

$$\begin{array}{r} F\,1\,F \\ \times\quad 2\,E \\ \hline 6\,3C \\ D\,2\,D \\ \hline D\,8\,B\,C \end{array}$$

Obrázok 4: Zadanie

$$\begin{array}{r} 2\,1\,2 \\ \times\quad 2\,3 \\ \hline 6\,36 \\ D\,2\,D \\ \hline D\,8\,B\,6 \end{array}$$

Obrázok 5:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,2 \\ \times\quad 2\,3 \\ \hline 6\,36 \\ 4\,2\,4 \\ \hline 4\,8\,7\,6 \end{array}$$

Obrázok 6: Riešenie

Keď už vieme, čo je čo, treba sa na príklad pozrieť s otázkou – ktoré písmenko by sme vedeli dopočítať ako prvé? V prvom čiastkovom súčine vidíme, že číslicu na mieste desiatok, 3, sme dostali po vynásobení $E \cdot 1$. ALE to ešte neznamená, že $E \cdot 1 = 3$, my totiž vieme, že nám mohol zvýšiť prechod cez desiatku zo súčinu $E \cdot F$. Presnejší je teda zápis $E \cdot 1 + zv = 3$ a skúsime zistiť, či nejaký zvyšok zv zostal, teda či je $E \cdot F > 9$. To zistíme priamo z toho, že na mieste stoviek máme číslicu 6, ktorá vznikla po súčine $E \cdot F$. Čiže s istotou môžeme tvrdiť, že $E \cdot F \leq 9$, teda nič „nezostalo“ a zvyšok $zv = 0$. Tak sme zistili, že $E = 3$.

Jednou ranou môžeme zistiť F aj C. Ako sme už tvrdili, súčin $E \cdot F$ je rovný 6. Pritom z predchádzajúceho násobenia $E \cdot 1 = 3$ určite nevznikol žiaden prechod cez desiatku, takže platí presne $E \cdot F = 6$. Po dosadení $E = 3$ dostávame $F = 2$.

Násobenie $F1F \cdot E = 63C$ začíname súčinom $E \cdot F = C$, takže sme zistili aj $C = 6$. Zistené písmenká si doplníme do úlohy (obrázok 5). Teraz už bude jednoduché doplniť zvyšok domácej úlohy. Všimnime si, že máme už celé zadanie vyplnené. Takže buď si príklad akoby nanovo vypočítame, alebo na to ideme postupne: V súčine $212 \cdot 2 = D2D$ počítame najskôr $2 \cdot 2 = D$, čiže $D = 4$. A napokon pri spočítavaní čiastkových súčinov po stĺpcoch, vidíme, že $D + 3 = B$ (ani tu nám nič nezostalo z predošlého stĺpca), takže $B = 4 + 3 = 7$. A teraz ešte dôležitá kontrola, či rôzne písmenká predstavujú rôzne číslice. Predstavujú.

Odpoveď: Tak môžeme zapísať výsledok, obrázok 6 ($B = 7$, $C = 6$, $D = 4$, $E = 3$, $F = 2$).

Komentár: V mnohých prípadoch ste zabudli spraviť úvahu, či mohlo niečo zvýšiť z predchádzajúcich násobení, a hoci v skutočnosti nezvýšilo, je to chybička postupu. Najmä ak ste hneď na začiatku napísali, že $E = 3$ (v tom prípade vám ten, kto si vaše riešenie prečíta, vôbec nemusí veriť!). Pretože takáto úvaha tvorila značnú časť postupu (všimnite si, že povedať ju čo najsprávnejšie, dá zabrať :)), ak vám chýbala, strhávali sme 3 body. Zvyšok príkladu bol už „mechanickejší“ a teda ste ho hravo rozlúskli :). Síce, ak to bolo až príliš „hravo“ a napísali ste len výsledok :P, dostali ste od nás 2 veľkonočné body.

B (pre Gamču): Tentoraz chceme pomôcť Miške s jej domácou úlohou: $LES \cdot LES = PRALES$ Každé písmeno chceme nahradiť rôznym číslom. Trojciferné čísla násobíme postupne (ako je to vysvetlené v časti A :)), ak nám ostane zvyšok – prechod cez desiatku, pričítame ho v ďalšom stĺpci. Vyzerá to takto:

$$\begin{array}{cccccc} & & & L & E & S \\ \times & & & L & E & S \\ \hline & & & L \cdot S & E \cdot S & S \cdot S \\ & & L \cdot E & E \cdot E & S \cdot E & \\ & L \cdot L & E \cdot L & S \cdot L & & \\ zv5 & zv4 & zv3 & zv2 & zv1 & \\ \hline P & R & A & L & E & S \end{array}$$

Ako vidíme, súčin $S \cdot S$ končí na takú istú cifru ako S. Tejto podmienke vyhovujú iba cifry 0 ($0 \cdot 0 = 0$), 1 ($1 \cdot 1 = 1$), 5 ($5 \cdot 5 = 25$), 6 ($6 \cdot 6 = 36$). Postupne ich teraz odskúšame:

1. $S = 0$
   Z tabuľky vidíme, že E je posledná cifra súčtu $E \cdot S + E \cdot S + \text{zv1}$. To je pri $S = 0$: $0 + 0 + 0$, čiže E by malo byť tiež 0. Ale E už nemôže byť 0, lebo rôzne písmená označujú rôzne cifry. Takže $S \neq 0$.
2. $S = 1$
   Prechod cez desiatku je 0, a v druhom stĺpci teraz sčítavame $E \cdot 1 + E \cdot 1 + 0$, teda $2 \cdot E$. Hľadáme také E, aby jeho dvojnásobok končil cifrou E. Jediné vyhovujúce číslo je 0. Opäť bude prechod cez desiatku nulový. Pokračujeme a hľadáme L. To je rovné poslednej cifre súčtu z tretieho stĺpca: $L \cdot S + E \cdot E + L \cdot S + \text{zv2}$; dosadíme to, čo už poznáme: $L \cdot 1 + 0 \cdot 0 + L \cdot 1 + 0 = 2 \cdot L$. Dostali sme sa do rovnakej situácie ako pri E, teda by nám zase vyhovovalo len $L = 0$. Ale L nesmie byť rovnaké ako E. Takže $S \neq 1$.
3. $S = 5$
   Prechod cez desiatku je 2 ($5 \cdot 5 = 25$). Hľadáme E, pre ktoré platí, že posledná cifra súčtu $E \cdot 5 + E \cdot 5 + 2$ je E, teda $10 \cdot E + 2 = \ldots E$ (takto si označíme číslo, ktoré končí cifrou E). Vidíme, že výraz $10 \cdot E$ bude mať na mieste jednotiek vždy 0, takže posledná cifra tohto súčtu závisí priamo od $zv1$, takže $E = 2$. Prechod cez desiatku do ďalšieho stĺpcu je $zv2 = 2$ ($2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 = 22$). Pokračujeme a v treťom stĺpci hľadáme L, pre ktoré platí, že posledná cifra $L \cdot 5 + 2 \cdot 2 + L \cdot 5 + 2$ je L, čiže $10 \cdot L + 6 = \ldots L$. Z toho zisťujeme cifru na mieste jednotiek: sčítanec $10 \cdot L$ tam má vždy 0, takže L závisí priamo od druhého sčítanca, od šestky, takže $L = 6$. Už máme celý LES :-D, tak ho skúsme vynásobiť sebou samým a overiť, či nám vznikol $PRALES$: $LES \cdot LES = 625 \cdot 625 = 390625$. Vidíme, že všetky rôzne písmenká sú zastúpené rôznymi ciframi a rovnaké rovnakými – máme prvé riešenie:)
   Odpoveď: $P = 3, R = 9, A = 0, L = 6, E = 2, S = 5$ Nikde nie je napísané, že existuje len jedno, tak hľadáme, či nie sú nejaké ďalšie :)

4. $S = 6$
Prechod cez desiatku je 3 ($6{\cdot}6 = 36$). Hľadáme vhodné E, pre ktoré platí v našom prípade, že posledná cifra $E{\cdot}6{+}E{\cdot}6{+}3 = E$, teda $12 \cdot E + 3 = \ldots E$. Nakreslíme si tabuľku so všetkými ciframi pre E, okrem $E = 6$, lebo dve písmenká nemôžu byť nahradené tou istou cifrou:

E	0	1	2	3	4	5	7	8	9
$12 \cdot E + 3$	3	15	27	39	51	63	87	99	111

Z tabuľky vidno, že jedine pre $E = 7$ platí požadovaná rovnosť, takže $E = 7$. Prechod cez desiatku do ďalšieho stĺpcu je $zv2 = 8$ ($7{\cdot}6{+}7{\cdot}6{+}3 = 87$). Pokračujeme v treťom stĺpci a hľadáme L, pre ktoré platí, že posledná cifra $L{\cdot}6{+}7{\cdot}7{+}L{\cdot}6{+}8$ je L, čiže $12 \cdot L + 57 = \ldots L$. Aj teraz si spravíme podobnú tabuľku pre L (okrem cifier 6, 7, lebo tie zastupujú S, E):

L	0	1	2	3	4	5	8	9
$12 \cdot L + 57$	57	69	81	93	105	117	153	165

Vidíme, že jediné vyhovujúce je $L = 3$. Aj teraz už máme celý LES, tak ho vynásobíme sebou samým a overíme, či vznikol $PRALES : LES \cdot LES = 376 \cdot 376 = 141376$. Cifry zastupujúce P a A sú však obe jednotky, takže $LES = 376$ nie je riešenie!

Odpoveď: Zadanie domácej úlohy teda vyzeralo nasledovne: $625 \cdot 625 = 390625$
Komentár: Najčastejšie ste riešili príklad ako vo vzorovom riešení, rozpísali ste si násobenie a zistili ste, že S je 0, 1, 5 alebo 6. Potom ste postupne vysvetľovali každú možnosť. Ak ste na nejakú pozabudli, alebo ste boli leniví:) tak sme museli nejaký bodík strhnúť. Niektorí z vás zistili, že posledné dvojčíslie je 01, 25, alebo 766 a potom k nim už len poskúšali všetky cifry za L. Dalo sa to aj takto:), ale lepší a šikovnejší spôsob je to postupne odôvodniť;). Veľmi pekné riešenie mala Albena Ivanova, ktorá na to išla matematicky, rovnicami:) a Barbora Lakotová, ktorá si všetko pekne zakreslila do tabuliek:).

Príklad č. 4 (opravovali Halucinka:) a Peťo):

Zo zadania vieme, že Peťo začína prvý. V kruhu stojí 111 ľudí, teda okrem Peťa a Mareka je ich 109. To znamená, že na jednej strane, povedzme, že napravo stojí medzi Peťom a Marekom párny počet ľudí a na ľavej strane stojí medzi Peťom a Marekom nepárny počet ľudí. Jedine vtedy celkový súčet ľudí bude nepárny. Peťo začína. Keď vyhodí jedného človeka z kruhu, ostane v kruhu párny počet ľudí. Potom je na rade Marek. Keď Marek vyhodí niekoho z kruhu, je v kruhu nepárny počet ľudí a na rade je zase Peter. Môžeme si všimnúť, že po každom Peťovom ťahu bude v kruhu párny počet ľudí a po každom Marekovom ťahu bude v kruhu nepárny počet ľudí.

U nás si Peťo zvolil zaujímavú taktiku. Povedal si, že vždy chce dosiahnuť, že na ľavej aj pravej strane je nepárny počet ľudí medzi ním a Marekom. (Pozn. HL:). Táto taktika nie je jediná, ale vyhneme sa ňou nepríjemným situáciám o rozoberaní Marekovej inteligencie :)))).

To znamená, že na začiatok odoberie človeka z tej strany, kde je ich párny počet (z pravej strany). Na oboch stranách je teraz nepárny počet ľudí. Potom vždy, keď Marek spraví ťah, ostane na jednej strane párny počet ľudí a na druhej nepárny. Ďalej, Peťo spraví taký ťah, aby po oboch stranách mal opäť nepárny počet ľudí, teda odoberie zo strany s párnym počtom ľudí. A takto dookola. Teda v hre budú nastávať len dve situácie:

1. párny počet ľudí na jednej strane, nepárny na druhej, na ťahu je Peťo, Peťo svojim ťahom hru preklopí do stavu 2.
2. nepárny počet ľudí na oboch stranách, na ťahu je Marek, z ktorejkoľvek strany Marek odobere, hra sa preklopí do stavu 1.

Takouto hrou sa dostane Peťo s Marekom do situácie, kedy z jednej strany bude medzi nimi len jeden človek (a na druhej strane vtedy bude párny počet ľudí). Ten kto sa tohto človeka dotkne prehral, pretože ho vyradí z hry a následne sa jeho môže dotknúť protihráč. V takejto chvíli sa hra preorientuje na druhú stranu a obaja hráči už musia odoberať ľudí z tejto strany. Teda na konci hry určite nastane situácia, kde z každej strany medzi Peťom a Marekom bude len jeden človek. A už vieme, že ten, kto je na rade teraz, tak prehral. Kto to je? Keďže je v hre párny počet ľudí, tak Peťo práve ťahal, takže je na rade Marek. Tým pádom sa Peťo stáva víťazom :)

Odpoveď: Túto hru vyhrá Peťo vďaka uvedenej taktike.
Komentár: Veľa z vás malo správny výsledok k tomuto príkladu. Však veľmi časté chyby boli: nepopísanie, kto je na konci hry na rade, za to sme strhávali jeden bodík. Alebo zjednodušenie si príkladu na 11 ľudí a potom ste to vypisovali, tí ste získali okolo 5 bodíkov. Často váš argument bol, že číslo 109 je nepárne, ale nič bližšie ste nepovedali, to už bolo len na také dva-tri bodíky. Ale celkovo tento príklad dopadol dobre :). Takže sa na vás tešíme nabudúce :).

Príklad č. 5 (opravovali Ľubka a Sašo):

Na začiatok si vypočítame, koľko bodov pripadlo spolu na jednu disciplínu, teda súčet bodov za prvé, druhé a tretie miesto v tejto disciplíne ($X + Y + Z$). Spočítame všetky body, ktoré dievčatá získali:

$$20 + 10 + 9 = 39$$

Disciplíny boli 3, teda pre jednu disciplínu bolo vyčlenených 13 ($39 : 3 = 13$) bodov. Teraz si postupne vypíšeme všetky možné kombinácie bodov, aké mohli byť udelené za prvé (X), druhé (Y) a tretie (Z) miesta. Samozrejme, nesmieme zabúdať na súčet, ktorý musí vždy zostať zachovaný: 13 a na vzťahy medzi X, Y a Z uvedené v zadaní: $X > Y > Z$. Takže pri vypisovaní si musíme dať pozor aj na to, aby boli X, Y a Z rôzne. Dostávame nasledovné možnosti:

1.miesto	2.miesto	3.miesto	Spolu
X	Y	Z	
10	2	1	13
9	3	1	13
8	4	1	13
8	3	2	13
7	5	1	13
7	4	2	13

Ďalšie možnosti nebolo potrebné vypisovať, lebo už v prípadoch, v ktorých je za 1. miesto 7 bodov, Miška nemá šancu získať akýmkoľvek spôsobom 20 bodov (vieme, že raz musela byť druhá a s počtom bodov za dve najvyššie miesta neprekročíme túto dvadsaťbodovú hranicu). Preto tieto možnosti môžeme vylúčiť a nie je potrebné skúšať menšie počty bodov za 1. miesto.

Je nám už známe, že Miška raz dosiahla druhé miesto, teda Y. Ak z jej počtu bodov odrátame toto Y, dostaneme určitú hodnotu bodov. Pri všetkých týchto možnostiach si môžeme položiť otázku, či sme pomocou ďalších dvoch umiestnení (bodovo spomedzi X, Y, alebo Z) schopní túto hodnotu dosiahnuť.

1. miesto	2. miesto	3. miesto	Spolu	Miška za 2. Miesto	$20 - Y$	Sme schopní?
X	Y	Z		Y	$20 - Y$	
10	2	1	13	2	18	Nie
9	3	1	13	3	17	Nie
8	*4*	*1*	*13*	*4*	*16*	*Áno*
8	3	2	13	3	17	Nie

Vyšla nám iba jedna možnosť, aké body mohla Miška dosiahnuť. Číslo 16 sme schopní zostaviť z 2-krát prvého miesta za 8 bodov a zvyšné 4 body mala za druhé miesto. Pre Ninu a Oľgu nám zostávajú už iba 1-krát prvé miesto, 2-krát druhé miesto a 3-krát tretie miesto, ktoré musíme medzi ne rozdeliť.

Oľga dosiahla v súťaži 9 bodov. Z hodnôt X, Y a Z sme schopní toto číslo vyskladať iba pomocou použitia dvoch Y a jedného Z.

Na Ninu nám teda zostalo už iba jedno prvé miesto a dve tretie miesta. Po zrátaní týchto troch čísel nám vyjde očakávaná hodnota: 10 bodov.

Na záver si ešte napíšeme takú menšiu tabuľku ako zhrnutie:

Miška	8	8	4
Nina	1	1	8
Oľga	4	4	1
Spolu	13	13	13

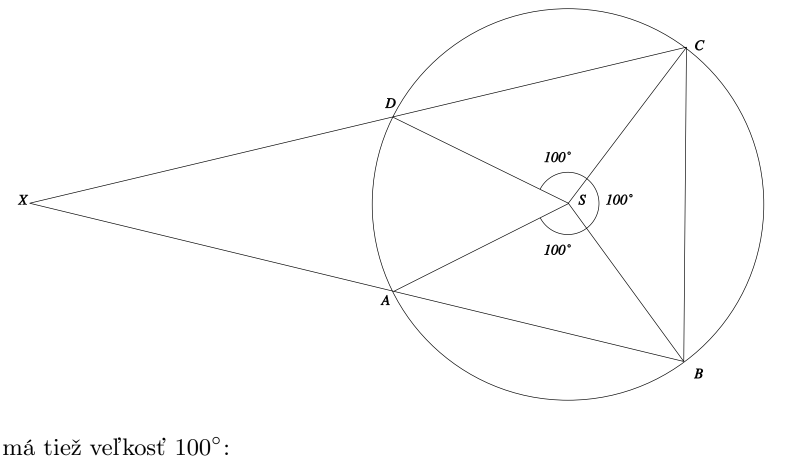
V zadaní sme mali napísané, že Miška skončila druhá v behu na 100 metrov. Keďže Oľga obsadila zvyšné druhé miesta, je nám zrejmé, že *v skoku do diaľky skončila druhá Oľga*. A ako nám aj z predchádzajúcej tabuľky vyplýva, *za 2. miesto sa udeľovali 4 body.*

Komentár: Celkovo ste tento príklad zvládli úspešne. Hlavný zádrheľ bol ale v tom, že ste často nevysvetlili svoje kroky, resp. ste sa zabudli zamyslieť nad všetkými možnosťami. Taktiež nebolo samozrejmé, že Miška musela automaticky skončiť 2 krát prvá a raz druhá. Za takéto chybičky sme vám postrhávali od 2 do 4 bodov (záviselo to samozrejme od obsiahlosti toho, čo ste nevyjasnili). Ak ste nám napísali iba výsledok, dali sme vám 2 bodíky.

Tento postup, ktorý sme uviedli my, použila väčšina z vás (preto sme ho predsa aj zverejnili :)). Vyskytli sa aj iné, originálnejšie riešenia, ktoré nás preveľmi potešili :).Pevne dúfame, že rovnako vynaliezaví budete aj pri ďalších riešeniach! :)

Príklad č. 6 (opravovali Emil, Monča, Kika):

Na začiatku riešenia úlohy si spojíme body B a C úsečkou, čím vznikne trojuholník BCS. Úsečky AS, BS, CS a DS majú rovnakú dĺžku, lebo sú všetky polomermi jednej a tej istej kružnice. Preto sú trojuholníky ASB, BSC a CSD rovnoramenné. V každom trojuholníku je súčet vnútorných uhlov 180°. V rovnoramennom trojuholníku platí, že dva vnútorné uhly pri základni trojuholníka sú rovnako veľké. Keďže uhol BSC má 100°, tak veľkosti uhlov BCS a SBC môžeme vypočítať nasledovne:



$$|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle SBC| = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

Podobne môžeme vypočítať veľkosť uhla ABS, pretože aj trojuholník ABS je rovnoramenný a uhol BSA má tiež veľkosť 100°:

$$|\sphericalangle ABS| = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

Trojuholník CSD je takisto rovnoramenný a aj uhol DSC má podľa zadania 100° a tak aj veľkosť uhla SCD môžeme vypočítať rovnako:

$$|\sphericalangle SCD| = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

Všimnime si teraz trojuholník BCX. Uhol XBC sa skladá z uhlov ABS a SBC, preto má veľkosť $40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$. Rovnako uhol BCX sa skladá z uhlov BCS a SCD a preto jeho veľkosť je $40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$. Súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°, preto má uhol BXC (a teda aj uhol AXC, lebo bod A leží na úsečke XB) veľkosť:

$$|\sphericalangle AXC| = 180^\circ - |\sphericalangle XBC| - |\sphericalangle BCX| = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

Odpoveď: Uhol AXC má veľkosť 20°.
Komentár: Dalo sa to riešiť aj cez trojuholník ADX alebo štvoruholník $ASDX$. Väčšina riešení mala dobrý postup aj výsledok, body sme strhávali hlavne za nedostatočné vysvetlenia, napr. často ste nenapísali, prečo sú trojuholníky ASB, BSC a CSD rovnoramenné, za čo sme strhli 2b. 1 bod sme strhávali za niektoré ďalšie nedostatky. Na záver jedna rada: keď chcete povedať, že uhly ASB, BSC, CSD a DSA dávajú dokopy plný uhol, tak nepíšte, že kruh/kružnica má 360° :).

Príklad č. 7 (opravovali iFka a Palo):

Chceme zistiť Vikiho číslo domu, podľa zadania býva Viki na ulici s číslami od 8 do 100. Poďme postupne skúmať, ako mohol Viki odpovedať na Miškine otázky a pozerať sa na to z Miškinej perspektívy, ktorá predpokladá, že jej Viki neklame. Keby na jej prvú otázku: „Je to číslo väčšie ako 50?“ odpovedal: „Áno“, Miška by sa už nemusela pýtať, či číslo začína na 3, pretože všetky takéto dvojciferné čísla sú zjavne menšie ako 50 a teda by ich vylúčila už pri prvej otázke. To znamená, že Viki Miške na prvú otázku odpovedal „Nie“. Miška si teda myslí, že hľadané číslo je menšie ako 50.

Teraz sa pozrime na poslednú „otázku“: „Viem, aké je to číslo, ak mi povieš, či je prvá číslica 3.“ V zadaní nemáme napísané, ako Viki odpovedal, to my však ani nepotrebujeme. Samotný spôsob, akým sa Miška pýtala, poukazuje na dôležitú vec: Bez ohľadu na to, aká bola Vikiho odpoveď, Miška následne vedela určiť konkrétne číslo jeho domu. To znamená, že pred položením tejto otázky (t.j. po prvých troch otázkach) sa musela rozhodovať *práve* medzi dvomi číslami domu (z ktorých sa jedno začínalo trojkou =). Inak by jej táto otázka nepomohla jednoznačne číslo určiť pri ľubovoľnej Vikiho odpovedi...

O tom ako Viki odpovedal na druhú a tretiu otázku však stále nič nevieme. Preskúšajme si všetky možnosti, ako na ne mohol Viki odpovedať. Potrebujeme nájsť také odpovede, po ktorých sa Miška bude musieť rozhodovať už iba medzi dvomi možnými číslami Vikiho domu. Po prvej otázke si Miška myslí, že číslo je menšie alebo rovné 50. Všetky možnosti odpovedí na ďalšie dve otázky zo zadania sú „Nie“+„Nie“, „Nie“+„Áno“, „Áno“+„Nie“ a „Áno“+„Áno“:

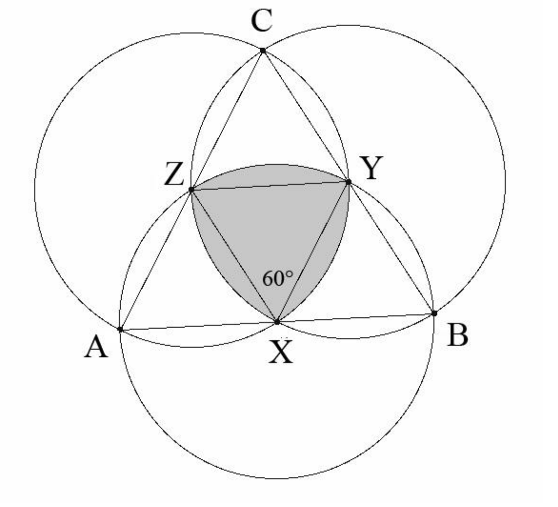
1. „Nie“ a „Nie“: Vyhovujú čísla menšie alebo rovné 50, ktoré nie sú násobkom 4 a nie sú druhou mocninou. Takýchto čísel je ale omnoho viac ako dve – napríklad 10, 11, 13, 14, 15, ...
2. „Nie“ a „Áno“: Vyhovujú čísla menšie alebo rovné 50, ktoré nie sú násobkom 4 a sú druhou mocninou. Takéto čísla sú práve tri – 9, 25 a 49. Štvrtá otázka nám však buď nevylúči ani jedno alebo vylúči všetky z nich, čiže by Miška nevedela jednoznačne určiť číslo Vikiho domu. Takže ani toto nie je možnosť, ktorú hľadáme.
3. „Áno“ a „Nie“: Vyhovujú čísla menšie alebo rovné 50, ktoré sú násobkom 4 a nie sú druhou mocninou. Takýchto čísel je takisto omnoho viac ako dve – napríklad 8, 12, 20, 24, 28, 32, ...
4. „Áno“ a „Áno“: Vyhovujú čísla menšie alebo rovné 50, ktoré sú násobkom 4 a zároveň sú druhou mocninou. Toto spĺňajú práve dve čísla – 16 a 36, z ktorých nám posledná otázka určite vyberie práve jedno, ktoré je podľa Mišky číslom domu. Toto sú odpovede, ktoré hľadáme.

Teraz už vieme ako Viki odpovedal Miške na jej prvé tri otázky. Postupne to bolo: *„Nie“, „Áno“ a „Áno“*. Zo zadania vieme, že pri prvých dvoch odpovediach klamal a pri tretej hovoril pravdu, čiže pravdivé odpovede na Miškine otázky majú byť „Áno“, „Nie“ a „Áno“. To znamená, že číslo Vikiho domu je v skutočnosti väčšie ako 50, nie je násobkom 4 a je druhou mocninou. Z čísel od 51 do 100 sú druhými mocninami iba čísla 64, 81 a 100. Z týchto však iba číslo 81 nie je násobkom štvorky. To znamená, že naozajstné číslo Vikiho domu je 81.
Odpoveď: Vikiho dom má číslo 81.
Komentár: K správnemu výsledku sa väčšina z vás dopracovala, ale iba za samotný výsledok sme udeľovali 1 bod :) 2 bodíky ste mohli získať za napísanie ako Viki odpovedal na jednotlivé otázky. Zvyšných 7 bodov sa rozdelilo medzi samotné riešenie a vysvetlenie postupu. Bodíky sme strhávali za nedostatočné odôvodnenie prečo je Vikiho odpoveď na prvú otázku „Nie“, prečo hľadáte také odpovede aby Miška mala nakoniec na výber len z dvoch možností a prečo musí jedna z nich začínať na trojku... Veľa z vás to zvládlo pekne, s viac či menej kostrbatými vysvetleniami napriek tomu, že formulovať tie úvahy bolo zložité :)

Nastali však 2 problémy: niektorí vychádzali z toho, že Viki na poslednú otázku odpovie „Áno“ a teda číslo začína trojkou, to však zo zadania určite nevyplýva; iní ste sa úplne vykašľali na Mišku a povedali ste si, že nájdete rovno skutočné číslo domu, tak aby bolo podľa nejakých Vikiho odpovedí jednoznačne určené. No ale v zadaní sa nikde nepíše, že to je jednoznačné (čo ak býva Viki v troch domoch?). Naopak, to či je výsledok jednoznačný treba zistiť, napríklad postupom ktorý sme uviedli. My chápeme, že aj takéto zjednodušené riešenie znie logicky, ale žiaľ sme ho za správny postup považovať nemohli a preto ste dostali pomenej bodov. Ponaučenie: nedomýšľajte si ako by to asi mohlo byť, fantázia sa dá využiť aj lepšie ;). Želáme veľa úspešných riešení v ďalších sériách :).

Príklad č. 8 (opravoval etome):

A (okrem Gamče): Uhloprqiečky delia kosoštvorec na 4 zhodné trojuholníky. V každom máme kružnicu, a tieto kružnice sa dotýkajú a tvoria hviezdu. Keď spojíme stredy P,Q,R,S týchto kružníc dostaneme 4 malé štvoruholníky, ktoré vytvárajú jeden veľký štvoruholník, ktorého strany sú $2r$ (kde r je polomer týchto štyroch kružníc).



Obrázok 7: obrázok k A

Ak sa pozrieme na jeden zo štyroch malých štvoruholníkov, napríklad $PVMU$, tak vidíme, že má $|PV| = |UM| = r$ a $|\sphericalangle PVM| = |\sphericalangle PUM| = 90°$, pretože priamky VM a UM sú dotyčnice ku kružnici a tie musia byť kolmé na spojnicu stredu s daným bodom dotyku. Naviac platí aj: $|\sphericalangle VMU| = 90°$, pretože uhlopriečky v kosoštvorci sú na seba kolmé. Preto aj štvrtý uhol VPU je $90°$-stupňový (dopočítali sme do $360°$) a teda štvoruholník $PVMU$ je štvorec a $|VM| = |MU| = r$. Rovnako je to aj s ostatnými troma malými štvoruholníkmi. Keďže všetky uhly v štvoruholníku $PQRS$ sú pravé a dĺžky strán rovnaké, $PQRS$ je štvorec.

V štvorci $PQRS$ máme štyri štvrťkruhy (lebo pri vrcholoch je $90°$), teda dokopy z toho vieme poskladať jeden celý kruh s polomerom r. Takže obsah štvorca so stranou $2r$ je rovnaký ako obsah jedného kruhu s polomerom r plus naša hviezda:

$$\begin{aligned} (2r)^2 &= \pi r^2 + 16 - 4\pi \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Všímajme si teraz len trojuholník AMD.

Trojuholníky AVP a ATP sú zhodné, lebo majú spoločnú stranu, rovnako veľký najväčší uhol oproti nej a ešte ďalšiu rovnako stranu rovnako dlhú, $|TP| = |PV|$. Preto aj $|AT| = |AV|$.

Z rovnakých dôvodov sú aj trojuholníky DTP a DUP zhodné.

Zo zadania vieme, že jedna z úsečiek $|AT|$ a $|DT|$ má dĺžku 4. Nech je to $|DT|$. Potom aj $|DU| = 4$. Dĺžku $|AT| = |AV|$ si označme x. (Aj v druhom prípade by nám vyšli dĺžky strán v trojuholníku AMD rovnako, akurát by sme si označili stranu $|DT|$ ako x)

Z Pytagorovej vety v trojuholníku AMD vieme:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= (x+r)^2 + (4+r)^2 \\ (x+4)^2 &= (x+2)^2 + (4+2)^2 \\ 4x &= 24 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Potom pravouhlý trojuholník ASD s odvesnami dlhými $6+2$ a $4+2$ má obsah:

$$\frac{(4+2)(6+2)}{2} = 24$$

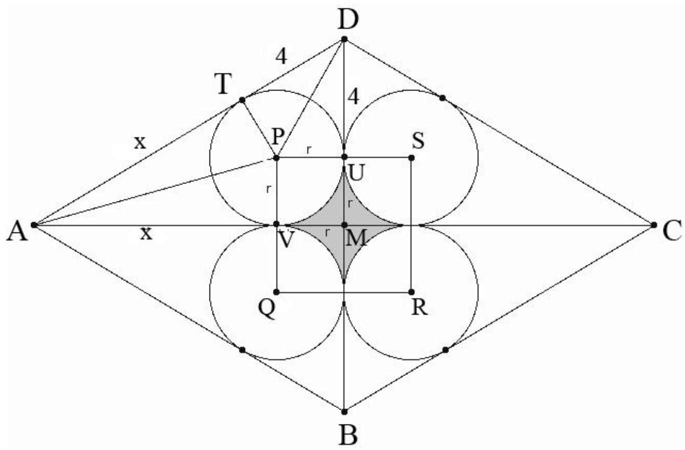
Náš kosoštvorec sa skladá zo štyroch takýchto trojuholníkov, preto:

Odpoveď: Obsah kosoštvorca je 96.

B (pre Gamču): Najprv si uvedomme, kde je stred vpísanej kružnice nášho trojuholníka, nazvime si ho ABC. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, tak jeho stred vpísanej, opísanej kružnice, ortocentrum (priesečník výšok) aj ťažisko sú jeden bod. Preto ak polomer vpísanej kružnice je $4\sqrt{3}$, ťažnica je trikrát dlhšia, teda $12\sqrt{3}$.

Teraz z Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku AXC vypočítame stranu trojuholníka ABC:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2 \\ a &= 24 \end{aligned}$$



Obrázok 8: obrázok k B

Teraz si poďme uvedomiť, kde sa nachádzajú a v akých bodoch sa pretínajú tie kružnice, ktoré sme si mali dokresliť. Toto je veľmi dôležité. Máme si nakresliť kružnice so stredmi v stredoch strán trojuholníka, a také čo prechádzajú jeho dvomi vrcholmi. Ak si označíme stred strany AB ako bod X, a chceli by sme spraviť kružnicu s týmto stredom a polomerom $|XC|$, tak ani bod A ani bod B by na nej neležali, lebo sú bližšie ako bod C (polovica strany AB má dĺžku $|AX| = |XB| = 12$, čo je menej ako ťažnica $|XC| = 12\sqrt{3}$). Ďalšou možnosťou je zobrať polomer $|XA| = 12$ (čo je rovnaké ako v tretej možnosti: polomer $|XB|$) – takáto kružnica prechádza dvomi bodmi trojuholníka, čiže táto možnosť vyhovuje. Teda z každého stredu strany X, Y, Z vieme nakresliť 1 kružnicu a dokopy budú tri.

Ďalej sa pozrime, kde sa tieto kružnice budú pretínať. Veľa z vás si všimlo, že je to v stredoch strán trojuholníka, ale treba vysvetliť prečo je tento náš, zatiaľ len tip, správny.

Pre kružnicu so stredom v bode X: Táto kružnica má polomer $|XA|$, čo je tá istá dĺžka ako dĺžky stredných priečok trojuholníka ABC (polovica ľubovoľnej strany trojuholníka ABC). Preto, ak z X nakreslíme stredné priečky XY a XZ, tak body Y a Z budú ležať na tejto kružnici, lebo sú vzdialené od stredu o takú dĺžku ako je polomer tejto kružnice. Rovnako sa dá ukázať, že aj zvyšné dve kružnice prechádzajú vždy dvomi stredmi strán.

Tieto naše kružnice prechádzajú stredmi strán, takže sa tam aj, vždy dve a dve a dve, pretínajú. Toto je veľmi dôležité povedať, aby sme mohli spočítať obsah prieniku týchto 3 kruhov (vyznačená časť na obrázku).

Vidíme, že prienik sa skladáq z jedného rovnostranného trojuholníka, tvoreného strednými priečkami – tie sú rovnako dlhé, a z troch rovnakých kruhových odsekov.

Poznámka: kruhový odsek dostaneme z kruhu jedným rovným odseknutím, kruhový výsek je ako kúsok pizze, to je niečo iné.

Pretože XYZ je rovnostranný, a teda uhly pri vrcholoch majú veľkosť $60°$, kruhový *výsek* z jedného z našich troch kruhov má jednu šestinu z obsahu celého kruhu s polomerom 12. Takýto kruhový výsek obsahuje trojuholník XYZ a *jeden* kruhový odsek (tá malá časť, ktorá je tam trikrát). Teda ak od obsahu tohto kruhového výseku:

$$S_{KV} = \frac{12^2\pi}{6} = 24\pi$$

odpočítame obsah trojuholníka XYZ (štvrtina obsahu trojuholníku ABC, pretože XYZ je tvorený jeho strednými priečkami):

$$S_{XYZ} = \frac{S_{ABC}}{4} = \frac{\frac{24\cdot 12\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}12^2 = 36\sqrt{3}$$

dostaneme obsah jedného kruhového odseku.

Teda jeden kruhový odsek má obsah $24\pi - 36\sqrt{3}$

Hľadaný obsah prieniku kruhov je teda obsah 3 kruhových odsekov plus obsah trojuholníka XYZ:

$$3\left(24\pi - 36\sqrt{3}\right) + 36\sqrt{3} = 72\pi - 72\sqrt{3} = 72\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

Komentár: Častou chybou bolo zaokrúhľovanie. Ak nie ste donútení zaokrúhľovať, tak to nerobte, výsledky chceme presné. π ani $\sqrt{3}$ sa nedajú napísať desatinným číslom presne, tak ich môžete nechať takto. Previesť výsledok alebo medzisúčet na desatinné číslo je dobré vtedy, keď chcete mať lepšiu predstavu aké veľké je to číslo a uvážiť, či presné počítanie nie je hlúposť vzhľadom na zadané hodnoty.

Ďalšou dôležitou vecou bolo zdôvodnenie, kde sa kružnice pretínajú. Z toho, že si to nakreslíte a náhodou to vyzerá, že by to mohlo byť v stredoch strán, to ešte nemusí byť pravda. Dokonca ani rysovanie to nedokazuje!

Ďalej bolo nutné spomenúť, kde je stred vpísanej kružnice vzhľadom na trojuholník, vysvetliť prečo kruhový výsek, ktorý počítate je práve šestina, a dôležité je aj, pri počítaní Pytagorovej vety napísať, z ktorého trojuholníka ste ju zobrali!

Toto bol ťažší príklad, bolo nutné povysvetľovať rôzne veci, ktoré nie sú také jasné ako sa zdajú. Lepšie je vysvetliť viacej ako menej.

Príklad č. 9 (opravovali Natali, Jakuub):

Keďže máme párny počet (80) bodov pravidelne rozmiestnených na kružnici, vieme z nich vytvoriť 40 dvojíc, ktorých spojnica prechádza cez stred kružnice. Budeme ich volať body na priemere. Navyše budeme tieto dvojice podľa farby daných dvoch bodov označovať FF, OO alebo FO. Každý bod patrí do jednej takejto dvojice.

Teraz si spomenieme na vetu o Tálesovej kružnici, ktorá nám hovorí, že z 3 rôznych bodov na kružnici vznikne pravouhlý trojuholník práve keď dva z nich sú na priemere a tretí leží ľubovoľne na kružnici.

Čiže ak máme 2 body rovnakej farby, napríklad fialové, ležiace na priemere kružnice, môžu byť preponou fialového pravouhlého trojuholníka. Už musíme k nemu nájsť iba ľubovoľný fialový bod na kružnici (okrem týchto dvoch). Fialových bodov je na kružnici ešte 38 $(40 - 2)$, teda s touto preponou tam máme 38 fialových pravouhlých trojuholníkov. Toto je však rovnaké pre každú FF preponu. Taktiež pre každú OO preponu môžeme vytvoriť 38 oranžových pravouhlých trojuholníkov (s každým bodom oranžovej farby okrem tých dvoch, ktoré sú už použité na preponu). Keďže ku každej FF aj ku každej OO prepone máme na kružnici 38 trojuholníkov, stačí nám porovnávať počet prepôn jednej a druhej farby.

Teraz chceme porovnať počet FF a počet OO dvojíc na priemere. Na to nám stačí uvedomiť si, že v každej FO dvojici je jeden bod z každej farby. Čiže keď všetkých FO dvojíc je X, bude v nich X fialových a X oranžových bodov. To znamená, že nám zostalo rovnako $(40 - X)$ fialových aj $(40 - X)$ oranžových bodov, ktoré sú vo dvojici s rovnakou farbou. Ale keď máme rovnako fialových a oranžových bodov, máme aj rovnako FF a OO dvojíc ($\frac{40-X}{2}$), čiže aj rovnako fialových a oranžových pravouhlých trojuholníkov ($38 \cdot \frac{40-X}{2}$).

Z toho vyplýva, že oranžových pravouhlých trojuholníkov nie je nikdy viac, vždy je pravouhlých trojuholníkov fialovej farby rovnako veľa ako tých oranžových.

Komentár: Veľa z vás dokazovalo len rovnaký počet prepôn, ale zabudlo dokázať, že ak je rovnako prepôn, je aj rovnako trojuholníkov. Ďalší to dokazovali pomocou vymieňania oranžových a fialových bodov, ale zabudli ukázať, prečo keď vymeníme ľubovoľnú oranžovú s ľubovoľnou fialovou, nezmení sa pomer fialových a oranžových prepôn, ukázali ste to len pre niektoré konkrétne prípady.

Prémia (opravoval Mišo):

Najskôr si ukážeme správne odpovede na otázky a šifry v zadaní prémie:

- Sestry v známom diele od A.P.Čechova sú 3, divadelná hra sa volá Tri sestry.
- Aby mohol človek získať prvý občiansky preukaz, musí mať 15 rokov.
- Na Slovensku máme v roku 2008 presne 16 pamätných dní. Bohužiaľ, ako sme zistili až neskôr, niektoré pramene udávajú nesprávny počet 14. Preto ste za odpoveď 14 nemali žiadny bodový postih.
- Porcelánové výročie svadby oslavujú manželia po 20 rokoch manželstva.
- V studenej vodičke z bystrého potôčka sa umývajú dievčatá, konkrétne sa to spieva v texte ľudovej piesne Z Východnej dievčatá.
- Z Dunajskej ulice pochádzajú chlapci, autorom knihy Chlapci z Dunajskej ulice bol Július Satinský.
- India je siedmy najväčší štát sveta, teda 6 krajín je väčších. Pozor na zdroje, ktoré uvádzajú aj Európsku Úniu, tá nie je štátnym útvarom.
- Áno, Kaspické more je najväčším jazerom sveta.
- Nie, Malé Karpaty nepatria medzi národné parky, ide o chránenú krajinnú oblasť.
- Slováci na ZOH v Turíne vybojovali 1 medailu, bol to Radoslav Židek v snowboardkrose.

A teraz si skompletizujeme zadanie úlohy, ktorú chceme vyriešiť:

Zadanie: Vikiho susedia, Mrkvičkovci, sú celkom zaujímavá rodinka. Pán Mrkvička má spolu s pani Mrkvičkovou tri deti. Raz k nim prišla na návštevu pani Petržlenová zo Sociologického výskumného ústavu a kládla im rôzne otázky o ich rodine a deťoch. Od pána Mrkvičku sa dozvedela, že ich deti majú 15, 16 a 20 rokov. Ďalej chcela zistiť, ktoré z toho sú dievčatá a ktoré chlapci. Vtedy však už bol pán Mrkvička unavený z toľkých otázok. Bol ochotný odpovedať už iba na 6 otázok, aj to iba áno alebo nie. Ako môže pani Petržlenová zistiť odpoveď na svoju anketovú otázku? A ešte pozor! Pani Mrkvičková ju upozornila, že jej manžel bude 1-krát klamať.

Riešenie: Chceme teda zistiť pohlavie troch detí rodiny Mrkvičkovcov, k dispozícii máme 6 otázok a vieme, že jedna bude zodpovedaná nepravdivo. Najväčším problémom je to, že nevieme, kedy bude pán Mrkvička klamať. Každú jeho odpoveď si preto musíme overiť. Najčastejšie ste pani Petržlenovej radili opýtať sa najskôr na pohlavie jedného z detí, teda napríklad či je najmladšie dieťa dievča. Odpoveď pána Mrkvičku môže byť klamlivá a preto treba presne tú istú otázku položiť ešte raz. Ak bude odpoveď rovnaká, vieme, že neklamal a vieme aj pohlavie najmladšieho dieťaťa. Ak sú odpovede rôzne, opýtame sa rovnakú otázku ešte raz a keďže pán Mrkvička už klamať nemôže, máme správnu odpoveď.

Rovnako postupujeme pri otázkach na pohlavie druhého dieťaťa. Teda pohlavie prvého a druhého dieťaťa zistíme zo 4 alebo 5 otázok, nemôže totiž klamať dvakrát. Ak nás oklamal pri otázkach na prvé dieťa, stačí sa opýtať na druhé a tretie len jednu otázku, vieme, že už klamať nebude. Ak nám pri prvom dieťati hovoril len pravdu a pri druhom klamal, máme za sebou 5 otázok (2+3), ale rovnako nám stačí už len jedna. Trošku musíme porozmýšľať, ak pán Mrkvička neklamal ani pri jednom z prvých dvoch detí. Poznáme síce pohlavie oboch, no máme už len dve otázky a vieme, že jedna odpoveď bude nepravdivá. Už nám nestačí opýtať sa dva razy tú istú otázku. Preto sa v piatej otázke opýtame niečo, na čo vieme odpoveď. Môže to byť otázka na pohlavie niektorého z prvých dvoch detí, no pokojne aj to, či je Gerlachovský štít najvyšší vrch Slovenska. Ak pán Mrkvička odpovie pravdivo, jeho posledná odpoveď musí byť nepravdivá. Takže sa opýtame, či je posledné dieťa dievča a jeho odpoveď len otočíme, ak povie áno, zapíšeme si nie a naopak. Ak pán Mrkvička odpovie na piatu otázku nepravdivo, vieme, že na poslednú už musí odpovedať pravdivo a tak sa rovnako môžeme opýtať, či je posledné dieťa dievča a odpoveď si zapíšeme ako pravdivú. A po piatich alebo šiestich otázkach si môže šikovná pani Petržlenová bez obáv zapísať správne informácie o pohlaví detí pána Mrkvičku.

Možností riešenia bolo viac, napríklad takéto kratšie, no pozor, je o niečo komplikovanejšie: Prvá otázka mohla znieť takto: „Budete klamať v odpovedi na šiestu otázku?“ Odpoveď áno znamená, že buď klame teraz alebo bude klamať pri šiestej otázke. Zvyšné štyri odpovede budú pravdivé a tak sa môžeme bez obáv pýtať na pohlavie každého dieťaťa. Ak odpovie nie, je to určite pravdivá odpoveď a šiesta odpoveď bude tiež pravdivá. Nemôže totiž klamať dvakrát, v prvej aj v šiestej otázke. V druhej otázke sa opýtame, či bude klamať v odpovedi na tretiu otázku. Opäť platí to isté, ako pri prvej otázke, ak povie áno, vieme, že táto alebo tretia odpoveď je nepravda a štvrtá, piata i šiesta odpoveď sú bez obáv pravdivé (už raz klamal) a môžeme sa pýtať na pohlavia. Ak povie nie, odpovede na túto i tretiu otázku sú pravdivé. V tomto prípade sa v tretej, štvrtej i piatej otázke opýtame na pohlavie každého dieťaťa. Vieme, že tretia odpoveď má byť pravdivá, šiesta tiež, nepravdivá je teda štvrtá alebo piata odpoveď. Preto šiesta otázka bude znieť, či v štvrtej odpovedi klamal. Odpoveď na šiestu otázku je pravdivá a teda ľahko zistíme, či je nepravdivá odpoveď na štvrtú alebo piatu otázku a tú len otočíme.

Komentár: Hlavné nedostatky riešení boli najmä takéto: iba doplnenie zadania a nič viac ($-4b$), neuvedenie doplneného zadania ($-1b$) a nesprávne doplnenie zadania (rôzne), najmä počet pamätných dní, čo som odpúšťal a umiestnenie Indie v rebríčku najväčších štátov sveta. Píšte prosím doplnené zadania; ako máme vedieť, či ste sa nepomýlili a aké zadanie vlastne riešite? A ak zadanie doplníte, aj ho vyriešte, doplnenie nie je všetko, zadanie tvorí ďalší matematický príklad. Ak zle doplníte zadanie, strata bodov je individuálna, ale aj tak odporúčam odpovede overiť z viacerých zdrojov, aby ste náhodou nepoužili jeden nesprávny. Veľa šťastia v ďalších sériach :).